Nesta prova considera-se fixada uma orientação do espaço e um sistema de coordenadas $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{O}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ em $\mathbf{E^3}$, em que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbf{V^3}$. A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos estão escritas no sistema $\mathbf{\Sigma}$ e coordenadas de vetores estão escritas na base $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Q1. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e seja $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes, então $[\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}\,] > 0$;

(II) se $\beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -1, \beta)$, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{z}$ é um múltiplo escalar do vetor $(1, 1, \gamma)$;

(III) se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}$ e a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{\pi}{4}$ radianos, então $\|(3\vec{v}) \wedge (4\vec{w})\| = 6\sqrt{2}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Considere os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. A altura do triângulo ABC relativa à base BC é igual a:

(a) $\sqrt{\frac{19}{22}}$;
(b) $2\frac{\sqrt{22}}{19}$;
(c) $\sqrt{\frac{22}{19}}$;
(d) $2\sqrt{\frac{22}{19}}$;
(e) $\frac{\sqrt{22}}{19}$.

Q3. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 1 + 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x - y - z = 0, \\ 5x + y - z - 4 = 0; \end{cases}$$

$$t : \frac{x}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{z+2}{6}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $r \neq s$, $r \neq t$ e $s \neq t$;
(b) $s = t \neq r$;
(c) $r = t \neq s$;
(d) $r = s = t$;
(e) $r = s \neq t$.

Q4. Considere os pontos:

$$A = (1,1,1), \quad B = (2,2,1), \quad C = (2,1,2), \quad D = (1,2,2)$$

e seja h a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC. Pode-se afirmar que:

(a) $\frac{3}{2} \leq h < 2$;
(b) $h < \frac{1}{2}$;
(c) $\frac{1}{2} \leq h < 1$;
(d) $h \geq 2$;
(e) $1 \leq h < \frac{3}{2}$.

Q5. Considere a reta:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que π contém r. Pode-se afirmar que:

(a) $4b + c + d = 0$;
(b) $7b + c + d = 0$;
(c) $6b + c + d = 0$;
(d) $5b + c + d = 0$;
(e) $3b + c + d = 0$.

Q6. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 5$, então $[\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] = 5$;

(II) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_2] = 3$, então $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1 + 3\vec{z}_2] = 11$;

(III) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}]$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q7. Sejam $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases de V^3 tais que:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1.$$

Se $\vec{v} = (3, 5, 7)_{\mathcal{B}}$ e se (x, y, z) denotam as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$, então $x + y + z$ é igual a:

(a) 1;
(b) 9;
(c) 7;
(d) 3;
(e) 10.

Q8. Considere o ponto $A = (-2, 3, 0)$ e o plano:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = 1 + 2\lambda - \mu, \\ z = -2 + \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

A distância entre A e π é igual a:

(a) $\sqrt{3}$;
(b) $\sqrt{14}$;
(c) $\sqrt{2}$;
(d) 0;
(e) $\frac{47}{\sqrt{14}}$.

Q9. Considere as retas:

$$r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$
$$s : X = (1, -1, 0) + \mu(1, 1, 1), \quad \mu \in \mathbb{R};$$
$$t : \begin{cases} z = 2, \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta:

(a) r e s são concorrentes, s e t são reversas;
(b) r e s são reversas, s e t são reversas;
(c) r e s são concorrentes, s e t são concorrentes;
(d) r e s são reversas, s e t são concorrentes;
(e) $r = s = t$.

Q10. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere os vetores:

$$\vec{e}_1 = (1, \alpha, -1), \quad \vec{e}_2 = (\alpha, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 1).$$

Assinale a alternativa correspondente ao conjunto dos valores de α que faz de $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base positiva de V^3:

(a) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
(b) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$;
(c) vazio;
(d) $[-2, 2]$;
(e) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Q11. Considere os pontos $A = (1, -2, 2)$, $B = (-3, 1, -2)$ e o plano:

$$\pi : 2x + y - z + 3 = 0.$$

Seja π_1 o plano que contém os pontos A e B e é normal ao plano π. A distância da origem O ao plano π_1 é igual a:

(a) $\frac{1}{49}$;
(b) 10;
(c) $\frac{\sqrt{5}}{7}$;
(d) $\frac{5}{21}$;
(e) 5.

Q12. Considere o ponto $A = (1, 1, 0)$ e as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : 2x = y + 1 = \frac{3z}{2}; \quad t : \begin{cases} x = -3 + \mu, \\ y = 1 + \mu, \\ z = \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Denote por π o plano que contém o ponto A e é paralelo às retas r e s. Seja $B = (a, b, c)$ o ponto onde a reta t corta o plano π. Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) -2;
(b) 4;
(c) 1;
(d) -9;
(e) -6.

Q13. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$. Se $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é igual a:

(a) $\sqrt{3}$;
(b) $\sqrt{5}$;
(c) $2\sqrt{3}$;
(d) $3\sqrt{3}$;
(e) $\sqrt{6}$.

Q14. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

A distância entre r e s é igual a:

(a) $\sqrt{\frac{6}{5}}$;
(b) $\sqrt{\frac{5}{6}}$;
(c) $\frac{7}{6}$;
(d) $\frac{\sqrt{5}}{12}$;
(e) $\frac{6}{7}$.

Q15. Considere o ponto $A = (0, 2, -2)$ e a reta:

$$r : X = (1, 5, 1) + \lambda(-1, 3, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja P o ponto de r mais próximo de A. Se $P = (a, b, c)$, então $a + b + c$ é igual a:

(a) 14;
(b) 7;
(c) 3;
(d) -2;
(e) -7.

Q16. Considere os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $P = (1, -1, 1)$ e a reta:

$$r : \begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Denote por Q o ponto de r com segunda coordenada positiva tal que a distância entre P e Q seja igual a 3. Temos que a área do triângulo ABQ é igual a:

(a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$;
(b) $4\sqrt{6}$;
(c) $\sqrt{6}$;
(d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$;
(e) $2\sqrt{6}$.