PROVA - TIPO 01

Q1. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V. Pode-se afirmar que:

(a) $S_1 \cup S_2$ é um subespaço de $S_1 + S_2$;
(b) $S_1 \cup S_2$ é um subespaço de V;
(c) S_1 e S_2 são subespaços de $S_1 + S_2$;
(d) $S_1 \cap S_2$ não é um subespaço de S_1;
(e) $S_1 + S_2$ é um subespaço de $S_1 \cap S_2$.

Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 5 e sejam $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ subconjuntos de V. Suponha que $A \cup B$ gere V. Assinale a alternativa correta:

(a) o subespaço $[v_1, v_2, v_3] \cap [w_1, w_2]$ tem dimensão maior ou igual a 1;
(b) w_1 pertence ao subespaço gerado por A;
(c) o conjunto $A \cup B$ pode ser linearmente dependente;
(d) o conjunto A é linearmente independente;
(e) a interseção $A \cap B$ pode não ser vazia.

1) $S_1 + S_2 \subset V$ e é subespaço. Logo, $0 \in S_1 + S_2$
Da mesma forma, S_1 é subespaço de V. $\therefore$ $0 \in S_1$. ...(I)
Também, $(\forall x, y)\ x, y \in S_1 \Rightarrow x + y \in S_1$ ...(II) (pois S_1 é subespaço de V)
$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall x \in S_1)\ \lambda x \in S_1$ ...(III)
Assim, como $S_1 \subset S_1 + S_2$, e satisfaz a (I); (II) e (III),
S_1 é subespaço de $S_1 + S_2$.
O mesmo argumento mostra que S_2 é subespaço de $S_1 + S_2$

---

2) $\#(A \cup B) = r \leq 5$ e $\dim V = n \geq 5$. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V.
Então, $\# \mathcal{B} = n$ e $\mathcal{B}$ é L.I. Dado que, por hipótese,
$A \cup B$ gera V, segue que $n = \# \mathcal{B} \leq \#(A \cup B) = r \leq 5$.
Logo, $n = r = 5$. Assim, como $A \cup B$ gera V e
$\#(A \cup B) = 5 = \dim V$, $A \cup B$ é base de V.
Em particular $A \cup B$ é L.I. Daí, dado que $A \subset A \cup B$,
A é L.I. #

Q3. Considere o subespaço S de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : a+2b+2c+2d=0 \text{ e } a+2b+c+2d=0\right\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base de $M_2(\mathbb{R})$ em que os primeiros vetores formam uma base de S:

(a) $\left\{\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;

(b) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$;

(c) $\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;

(d) $\left\{\begin{pmatrix}8 & 12\\ -6 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;

(e) $\left\{\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

Q4. A soma das coordenadas do vetor $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ relativamente à base:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ é igual a:

(a) 0;
(b) -1;
(c) 2;
(d) -2;
(e) 1.

3) $x=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in S \Leftrightarrow \begin{cases} c=0\\ a+2b+2d=0\end{cases}$ $\therefore$ $x\in S \Leftrightarrow (\exists\, b,d\in\mathbb{R})$ $x=\begin{pmatrix}-2b-2d & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, b,d\in\mathbb{R})$ $x=b\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Logo, como $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_0=\left\{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ é base de S e

$B_1=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{u_1};\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{u_2};\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{e_3};\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{e_4}\right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$

Agora, sendo $B_2=\{u_2, u_1, v_3, v_4\}$; $v_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $v_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

e notando que

$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, segue que B_2 é base de $M_2(\mathbb{R})$

(pois tem 4 elementos L.I.) e os 2 primeiros compõem uma base de S.

---

4) $a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c+d=0\\ -b+d=0\\ c=0\\ d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-2c-d=-2-1=-3\\ b=d=1\\ c=0\\ d=1\end{cases}$

$\therefore$ $a+b+c+d=-3+1+0+1=\boxed{-1}$.

. Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 e seja $\{v_1, \overset{\mathcal{B}}{\overset{\|}{v_2}}, v_3\}$ uma base V. Considere o conjunto $A = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$. Pode-se afirmar e:

- o subespaço gerado por A tem dimensão 2;
- A é linearmente dependente;
- $\dim([v_1, v_1 + v_2] \cap [v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3]) = 2$;
- A é uma base de V;
- A não gera V.

5) Dado que $v_2 = -v_1 + (v_1+v_2)$ e
$v_3 = -(v_1+v_2) + (v_1+v_2+v_3)$, todo elemento de A é comb. linear dos de $\mathcal{B}$ e reciprocam/.

Logo, $[A] = [\mathcal{B}] = V$. Como $\# A = 3 = \dim V$, A é L.I.

$\therefore$ A é base de V. #

. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ ses de S_1 e de S_2, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 \cap S_2$;

(II) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$;

III) toda base de V contém alguma base de S_1.

sinale a alternativa correta:

-) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
-) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
-) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
-) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
-) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

6) Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S_1 = S_2 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$

Então, $\mathcal{B}_1 = \{(1,0)\}$ é base de S_1 e $\mathcal{B}_2 = \{(-1,0)\}$ é base de S_2.

Logo, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \phi$ e $S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2$

Vê-se $\therefore$ que, neste caso, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ NÃO é base de $S_1 \cap S_2$

Logo, (I) é falsa.

Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \mathbb{R}^2 = S_2$; $\mathcal{B}_1 = \{(1,0);(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(-1,0);(0,-1)\}$.

Logo, $\mathcal{B}_1$ é base S_1, $\mathcal{B}_2$ é base de S_2, mas

$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1,0);(0,1);(-1,0);(0,-1)\}$ NÃO é base de $\mathbb{R}^2 = S_1 + S_2$

(pois não é L.I.).

Logo, (II) é falsa.

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S_1 = [(1,1)] = \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B} = \{(1,0);(0,1)\}$ é base de V, mas $\{(1,0)\} \not\subset S_1$, $\{(0,1)\} \not\subset S_1$ e $\therefore$ não são bases de S_1 e $\phi (\subset \mathcal{B})$ não é base de S_1.

$\therefore$ nenhuma base de S_1 está contida em $\mathcal{B}$.

$\therefore$ (III) é falsa.

. Seja $c \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto A de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$A = \{(1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, 1, c, 1)\}.$$

mos que o conjunto A está contido numa base de $\mathbb{R}^4$ se, e somente se:

-) $c \neq 0$;
-) $c \neq 1$;
-) $c \neq -4$;
-) $c \neq -3$;
-) $c \neq -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & c & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c+3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A é L.I. $\Leftrightarrow$ $c+3 \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -3$.

Logo A está contido em uma base (de $\mathbb{R}^4$) $\Leftrightarrow$ A é L.I. $\Leftrightarrow$ $c \neq -3$

Q8. No conjunto $V = \mathbb{R}^2$, considere as operações $\oplus$ e $\odot$ definidas por:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1), \quad \alpha \odot (a, b) = (\alpha a, 0),$$

para todos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *duas* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;

(b) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *uma* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;

(c) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *três* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;

(d) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *quatro* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;

(e) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, é um espaço vetorial.

Q9. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os polinômios:

$$p_1(t) = 1 - 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = -2 + t + t^2, \quad p_3(t) = -5 + 4t - t^2$$

e $q(t) = a - t + (13 + a)t^2$. Pode-se afirmar que:

(a) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = \frac{7}{3}$;

(b) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = -4$;

(c) $q \in [p_1, p_2, p_3]$;

(d) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = \frac{4}{3}$;

(e) $q \notin [p_1, p_2, p_3]$.

---

8 (*) $1 \odot (1,1) = (1,0) \neq (1,1)$ $\therefore$ $1 \odot (a,b) = (a,b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ é falsa.

(*) $(1+1) \odot (1,1) = (2,0) \neq (1,-1) = (1,0) \oplus (1,0) = [1 \odot (1,1)] \oplus$
$\oplus [1 \odot (1,1)]$.

Logo, é falso que $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)$
$(\alpha + \beta) \odot (a,b) = [\alpha \odot (a,b)] \oplus \beta \odot (a,b)$

(*) $1 \odot [(1,0) \oplus (1,0)] = 1 \odot (1,-1) = (1,0) \neq$
$[1 \odot (1,0)] \oplus [1 \odot (1,0)] = (1,0) \oplus (1,0) = (1,-1)$

Logo, é falso que $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2)$
$\alpha \odot [(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2)] = [\alpha \odot (a_1,b_1)] \oplus [\alpha \odot (a_2,b_2)]$.

(*) É fácil verificar que as outras 5 propriedades são verdadeiras.

9
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & a \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 13+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & a \\ 0 & -3 & -6 & -1+2a \\ 0 & 7 & 14 & 13-2a \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -5 & a \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & -1+2a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8a+32}{3} \end{pmatrix}$$

Logo, $q \in [p_1, p_2, p_3] \Leftrightarrow$ a 4ª coluna <u>não</u> tem pivô $\Leftrightarrow \frac{8a+32}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -4}$ //

Q10. Considere as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, definidas por:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,$$
$$f_4(x) = \operatorname{sen}(2x), \quad f_5(x) = 2\operatorname{sen} x, \quad f_6(x) = \cos(2x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja V o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A dimensão do subespaço $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$ de V é igual a: $= S$

(a) 4;
(b) 6;
(c) 5;
(d) 2;
(e) 3.

Q11. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M_2(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b + 2c + 3d = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(b) $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(c) $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(d) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(e) $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

(10) Note-se que $f_3 = \frac{1}{2} f_5 - f_2$. Agora, sendo $B = \{f_1, f_2, f_4, f_5, f_6\}$, mostraremos B é L.I.

De fato, se $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$ e $af_1 + bf_2 + cf_4 + df_5 + ef_6 = 0$, então
$0 = af_1(0) + bf_2(0) + cf_3(0) + df_4(0) + ef_5(0) = a + b + e. \quad \dots (I)$.

Também, derivando a eq. acima temos:
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -b\operatorname{sen} x + 2c\cos(2x) + 2d\cos x - 2e\operatorname{sen}(2x) = 0.$

Em particular, p/ $x = 0$, temos: $2c + 2d = 0 \dots (II)$.

Derivando, temos:
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad b\cos x + 4c\operatorname{sen}(2x) + 2d\operatorname{sen} x + 4e\cos(2x) = 0$

$\therefore$, p/ $x = 0$, temos: $b + 4e = 0 \dots (III)$

Derivando, temos: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -b\operatorname{sen} x + 8c\cos(2x) + 2d\cos x - 8e\operatorname{sen}(2x) =$

$\therefore$ p/ $x = 0$, temos: $8c + 2d = 0 \dots (IV)$

Derivando, temos: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad b\cos x + 16c\operatorname{sen}(2x) + 2d\operatorname{sen} x + 16e\cos(2$

$\therefore$ p/ $x = 0$, temos: $b + 16e = 0 \dots (V)$.

Conclusão: de (II), (IV) resulta $c = d = 0$, e de (I), (III), (V), $a = b = e = 0$

$\therefore$ B é L.I. e $[B] = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6] = S$.

$\therefore$ B é base de S e $\therefore$ $\dim S = \# B = 5$.

$x \in S_1 \Leftrightarrow (\exists a, c, d \in \mathbb{R}) \quad x = \begin{pmatrix} a & -2c-3d \\ c & d \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{u_2} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u_3}$.

Logo, $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ gera S_1, e como claram/ B_1 é L.I, $\dim S_1 = \# B_1 = 3$.

Claram/, também $B_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$ é base de S_2. $\therefore$ $\dim S_2 = \# B_2 = 2$. Logo, $B_1 \cup B_2 = \{u_1, u_2, u_3, v_2\}$ gera $S_1 + S_2$

ra, de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Segue que $B_1 \cup B_2$ é base de $S_1 + S_2$. $\therefore$ $\dim S_1 + S_2 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ $\therefore$ $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$ e

$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) = 3 + 2 - 4 = 1$.

#

2. Seja V um espaço vetorial e considere as seguintes afirmações:

(I) se A é um conjunto de geradores de V e se $u \in V$ não pertence a A, então o conjunto $A \cup \{u\}$ é linearmente dependente;

(II) se V tem dimensão finita e igual a n, então todo subconjunto de V com n elementos é linearmente independente;

(III) se $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_q\}$ são subconjuntos linearmente independentes de V tais que $[u_1, \ldots, u_p] \cap [v_1, \ldots, v_q] = \{0\}$, então o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

inale a alternativa correta:

- todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

3. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$= [(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4),(5,0,-1,-1)]$.

ıa base para S é:

- $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(5,0,-1,-1)\}$;
- $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(-1,-3,2,4)\}$;
- $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4)\}$;
- $\{(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(5,0,-1,-1)\}$;
- $\{(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4),(5,0,-1,-1)\}$.

---

(12) (*) $v \in V = [A]$ $\therefore$ $A \cup \{v\}$ é L.D. Logo (I) é verdadeira.

(*) Seja $V = \mathbb{R}^2$; $A = \{(1,0),(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.
$\# A = 2 = \dim V$, mas A é L.D. $\therefore$ (II) é falsa.

(*) Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ t.q.
$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q = 0$
Então, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = (-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_q) v_q \in [u_1, \ldots, u_p] \cap [v_1, \ldots, v_p] = \{0\}$.
Logo $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ e $(-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_p) v_p = 0$.
De modo que, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0 = -\beta_1 = \cdots = -\beta_p$
$\therefore \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$. e $\therefore$ $A \cup B$ é L.I #
$\therefore$ (III) é verdadeira.

---

(13)
$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & -8 & 8 & 7 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $\{u_1, u_2, u_4\}$ é base de S.

Q14. Sejam V um espaço vetorial e S um subespaço de V. Considere as seguintes afirmações:

V (I) se V tem dimensão finita, então toda base de S está contida numa base de V;

F (II) dados $u_1, \dots, u_k \in V$, se todo elemento de S é combinação linear dos vetores $u_1, \dots, u_k$, então S é o subespaço gerado por $\{u_1, \dots, u_k\}$;

(III) se q é o número de elementos de um conjunto de geradores de V e p é o número de elementos de um subconjunto linearmente independente de V, então $p \leq q$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto A de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$A = \{1 + ax, b + x + x^2, 2 + 2x + 2ax^2\}.$$

Temos que A é linearmente independente se, e somente se:

(a) $a \neq 0$ e $b \neq 0$;

(b) $a + b \neq a^2$;

(c) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$;

(d) $a^2b + 1 \neq 2a$;

(e) $ab + 1 \neq 2a$.

(14) (*) Se A é base de S, então A é L.I. (em V) $\therefore$ ($\exists\, B$ = base de V) t.q. $A \subset B$. $\therefore$ (I) é verdadeira.

(*) Seja $V = \mathbb{R}^2$; $u_1 = (1,0)$; $u_2 = (0,1)$; $S = [(1,1)] = \{(\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Assim, $\forall\, x = (\alpha,\alpha) \in S$; $x = \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2$

Mas, $[u_1, u_2] = \mathbb{R}^2 \neq S$. $\therefore$ (II) é falsa

(*) (III) é verdadeira. Este é o teorema fundamental (provado em aula e nos textos de referência do curso) desta parte da matéria.

(15) $$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 0 & 1-ab & 2-2a \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & b & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2a \\ 0 & 0 & \boxed{a^2b-2a+1} \end{pmatrix}$$

$\therefore A$ é L.I. $\iff$ a 3ª coluna tem pivô $\iff$

$\iff a^2b - 2a + 1 \neq 0 \iff a^2b + 1 \neq 2a$

16. Considere as seguintes afirmações:

S $\|$

(I) para qualquer $A \in M_n(\mathbb{R})$, vale que $\{X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$;

(II) se $A = \{u_1, \ldots, u_q\}$ é um subconjunto linearmente dependente de um espaço vetorial, então todo elemento de A é combinação linear dos outros elementos de A;

(III) dados um espaço vetorial V, vetores distintos $u_1, u_2, u_3 \in V$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente, então o conjunto $\{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$ também é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
c) todas as afirmações são verdadeiras;
d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(I) Fixada $A \in M_n(\mathbb{R})$; $A \cdot 0 = 0 = 0 \cdot A$ $\therefore 0 \in S$

$\cdot$ $X, Y \in S \Rightarrow A \cdot (X+Y) = A \cdot X + A \cdot Y = X \cdot A + Y \cdot A = (X+Y) \cdot A$

$\therefore X + Y \in S$

$\cdot (\lambda \in \mathbb{R})$; $X \in S \Rightarrow A \cdot (\lambda X) = \lambda \cdot (A \cdot X) = \lambda \cdot (X \cdot A) = (\lambda X) \cdot A$

$\therefore \lambda X \in S$

$\therefore S$ é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ $(\forall A \in M_n(\mathbb{R}))$

$\therefore$ I é verdadeira

(II) O exemplo abaixo prova que (II) é falsa.

$V = \mathbb{R}^2$; $A = \{(1,0) ; (0,0)\}$ é L.D. (pois $(0,0) = 0 \cdot (1,0)$),

mas $(1,0)$ não é comb. linear dos restantes elementos de A (de fato, $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $(1,0) \neq \alpha(0,0)$).

(III) é verdadeira. Vejamos 2 maneiras de provar.

Prova (i): Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 u_1 + \lambda_2(u_2 + \alpha u_1) + \lambda_3 u_3 = 0$, então

$(\lambda_1 + \alpha \cdot \lambda_2) u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ e $\therefore$, como $\{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I.,

$\lambda_1 + \alpha \cdot \lambda_2 = 0$; $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$. De modo que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\therefore \{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$ é L.I.

Prova (ii): $S = [u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3]$, pois, dado que $u_2 = (-\alpha) u_1 + (u_2 + \alpha u_1)$, todo elem. de $\{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$ é comb. linear dos elems. de $\{u_1, u_2, u_3\}$ e reciprocam.

Como $\{u_1, u_2, u_3\} = B$ é L.I. (por hip.) segue que $\dim S = \# B = 3$.

Logo $B' = \{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$ gera S e $\# B' = 3 = \dim S$.

$\therefore B'$ é L.I. #