Álgebra Linear II - Poli - Prova 2

2014

Q 1. Seja U um espaço vetorial com $\dim(U) = 200$. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T\colon U \to U$ tal que

$$20 \dim(\operatorname{Ker} T) + 30 \dim(\operatorname{Im} T) = 3500;$$

(II) se $T\colon U \to U$ é uma transformação linear tal que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 150$, então a imagem de T não está contida em $\operatorname{Ker}(T)$;

(III) se $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 185$, então a imagem de T está contida em $\operatorname{Ker}(T)$;

Assinale a alternativa correta.

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

Solução: Lembramos que para qualquer transfromação linear $T\colon U \to U$ temos que $\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$.

(I) Sejam $k = \dim(\operatorname{Ker}(T))$ e $m = \dim(\operatorname{Im}(T))$. Assim obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} k + m &= 200 \\ 20k + 30m &= 3500 \end{aligned}$$

que tem como única solução $m = -50$ e $k = 250$. Como sempre acontece que $0 \leq \dim(\operatorname{Im}(T)) \leq \dim(U)$ obtemos que (I) é falsa.

(II) Como $\dim(U) = 200$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 150$, obtemos que $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 50$. Dados dois subespaços A, B de um espaço vetorial, se $A \subseteq B$, então $\dim(A) \leq \dim(B)$. Logo não é possível que $\operatorname{Im}(T) \leq \operatorname{Ker}(T)$. Portanto (II) é verdadeira.

(III) A afirmação (III) é falsa. Por exemplo, seja $\{u_1, \dots, u_{200}\}$ uma base de U. Então existe uma transformação linear $S\colon U \to U$ tal que $S(u_i) = u_i$ para $1 \leq i \leq 15$ e $S(u_i) = 0$ para $16 \leq i \leq 200$. Então temos que $\operatorname{Ker}(S) = [u_{16}, \dots, u_{200}]$ e $\operatorname{Im}(S) \nsubseteq \operatorname{Ker}(S)$. $\square$

Q 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V. Sejam $x, y \in V$ tais que $\|x\| = \|y\|$. Pode-se afirmar que:

(a) $x - y$ é ortogonal a $x + y$.

(b) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

(c) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$, e $y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, u_i\rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$.

(d) se $n \geq 2$, $\text{proj}_{[u_1,u_2]}(x+y) = \langle x+y, u_1\rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} + \langle x+y, u_2\rangle \frac{u_2}{\|u_2\|^2}$.

(e) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Solução: (a) é verdadeira pois:

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, -y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$

(b) Em geral $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Logo (b) é verdade somente quando $\langle x, y\rangle = 0$.

(c) é verdadeira quando $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal. Mas não é certa em geral. Não é dificil encontrar contraexemplos em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

(d) é verdadeira quando u_1 e u_2 são ortogonais (e não nulos). Mas não é certa em geral. Não é dificil encontrar contraexemplos em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

(e) é verdade se, e somente se, x e y são ortogonais (Teorema de Pitagoras). □

Q 3. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $v, w \in V$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = 1$ e $\langle v, w\rangle = -2$, então $\|v - 5w\| = 7$;

(II) Se U é um subespaço de V de dimensão finita e igual a n e se $e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$ são não nulos e ortogonais dois a dois, então:

$$u = \frac{\langle u, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{\langle u, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} e_2 + \cdots + \frac{\langle u, e_n\rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

para todo $u \in U$;

(III) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de V, então $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\| = \sqrt{n}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Solução: Todas as afirmações são verdadeiras.

(I) $\|v-5w\|^2 = \langle v-5w, v-5w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,-5w\rangle + \langle -5w, v\rangle + \langle -5w,-5w\rangle = \|v\|^2 - 5\langle v,w\rangle - 5\langle v,w\rangle + 25\|w\|^2 = 4+20+25 = 49$. Logo $\|v-5w\| = 7$.

(II) Como os vetores $e_1,\dots,e_n$ são não nulos e ortogonais dois a dois, eles são l.i. Como temos n vetores l.i. e a dimensão de U é n, o conjunto $\{e_1,\dots,e_n\}$ é uma base ortogonal de U. Assim, dado $u\in U$ temos que $u=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n$ para uns únicos $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$.

Por outro lado, para cada i, $\langle u, e_i\rangle = \langle \alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n, e_i\rangle = \alpha_i\langle e_i, e_i\rangle$. Logo $\alpha_i = \frac{\langle u,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}$ para $i=1,\dots,n$.

(III) $\|u_1+u_2+\cdots+u_n\|^2 = \langle u_1+u_2+\cdots+u_n, u_1+u_2+\cdots+u_n\rangle = \langle u_1,u_1\rangle+\cdots+\langle u_n,u_n\rangle = \|u_1\|^2+\cdots+\|u_n\|^2 = 1+\overset{(n}{\cdots}+1 = n$. Logo $\|u_1+u_2+\cdots+u_n\| = \sqrt{n}$. □

Q 4. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e U um subespaço de V de dimensão finita e igual a n. Sejam $\{u_1,\dots,u_n\}$ uma base de U e $v\in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Existem únicos $x\in U$ e $y\in U^\perp$ tais que $v=x+y$;

(II) O elemento de U mais próximo de v é:

$$w = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1+\cdots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n;$$

(III) Se W é um subespaço de V tal que $V=U\oplus W$, então $W=U^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Solução: (I) é necessariamente verdadeira pois estudamos o seguinte resultado: Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e U um subespaço de V de dimensão finita. Então $V=U\oplus U^\perp$.

(II) Quando a base $\{u_1,\dots,u_n\}$ é uma base ortogonal de U, o enunciado de (II) é verdadeiro. Mas não é complicado encontrar contraexemplos em $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar quando$\{u_1,\dots,u_n\}$ não é ortogonal.

(III) Esta afirmação é falsa. Por exemplo, seja $V=\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Consideremos a base ortogonal $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $U=[(1,0,0)]$. Então $U^\perp = [(0,1,0),(0,0,1)]$. Mas $\mathbb{R}^3 = U\oplus[(1,1,0),(1,0,1)]$. □

Q 5. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ e seja $T\colon P_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1)=(1,2,1),\quad T(1+x)=(1,a,b),\quad T(1+x+x^2)=(1,1,2).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é necessariamente injetora;

(b) T não é injetora se, e somente, se $a+b \neq 3$;

(c) T não é injetora se, e somente, se $a+b=3$;

(d) T não é injetora se, e somente, se $a+b \neq 5$;

(e) T não é injetora se, e somente, se $a+b=5$.

Solução: T é injetora se, somente se, $\mathrm{Ker}(T)=0$.

O conjunto $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$ (pois $\dim P_2(\mathbb{R})=3$ e eles são l.i.). Logo para qualquer $p \in P_2(\mathbb{R})$, existem uns únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$p = \alpha 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2).$$

Assim,

$$T(p) = \alpha T(1) + \beta T(1+x) + \gamma T(1+x+x^2) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Logo $T(p)=0$ se, e somente se, α, β, γ são soluções do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & b\beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{ou equivalentemente} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \gamma & + & \beta & = & 0 \\ 2\alpha & + & \gamma & + & a\beta & = & 0 \\ \alpha & + & 2\gamma & + & b\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & b-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & a+b-3 \end{pmatrix}.$$

T é injetora se, e somente se, $T(p)=0$ implica que $p=0$ (i.e. $\mathrm{Ker}(T)=0$). Isso é equivalente a que a única solução do sistema seja $\alpha=\beta=\gamma=0$. Equivalentemente $a+b \neq 3$.

Logo temos que T não é injetora se, e somente se, $a+b=3$. □

Q 6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido de seu produto interno canônico. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon -x+y=0 \text{ e } -2x+z+3t=0\}.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) $U^\perp = [(-2,0,1,3),(1,1,3,2)]$;

(b) $U^\perp = [(1,1,0,0),(2,0,2,3)]$;

(c) $U^\perp = [(-2,0,1,3),(-1,1,0,0)]$;

(d) $U^\perp = [(-2,0,1,3)]$;

(e) $U^\perp = [(-1,1,0,0)]$.

Solução: Primeiro vamos encontrar uma base de U. Para isso resolvemos o sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim os vetores de U são:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Logo, fazendo $\alpha = 2$, $\beta = 0$ e $\alpha = 0$, $\beta = 2$, obtemos que $U = [(1,1,2,0),(3,3,0,2)]$.

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= [(1,1,2,0),(3,3,0,2)]^{\perp} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon \langle (1,1,2,0),(x,y,z,t)\rangle = \langle (3,3,0,2),(x,y,z,t)\rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + 2z = 3x + 3y + 2t = 0\}. \end{aligned}$$

Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Assim os vetores de $U^{\perp}$ são:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \frac{2}{3}\beta \\ \alpha \\ \frac{1}{3}\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Logo, fazendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\alpha = 0$, $\beta = 3$, obtemos que $U = [(-1,1,0,0),(-2,0,1,3)]$. □

Q 7. Considere o espaço vetorial $C([0,2])$ munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([0,2]),$$

e seja U o subespaço de $C([0,2])$ dado por $U = [1, t]$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\text{proj}_U(e^t) = \frac{e^2-7}{2} + 3t$.

(b) $\text{proj}_U(e^t) = \frac{e^2-1}{2} + 5t$.

(c) $\text{proj}_U(e^t) = \frac{e^2-1}{2} + 3t$.

(d) $\text{proj}_U(e^t) = \frac{e^2-1}{2} + 7t$.

(e) $\text{proj}_U(e^t) = \frac{e^2-15}{2} + 7t$.

Solução: Primeiro observamos que a base de U dada $\{1, t\}$ não é ortogonal. Por isso aplicamos o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal de U.

O primeiro elemento da base ortogonal vai ser 1 o segundo é calculado de acordo com

$$t - \frac{\langle 1, t\rangle}{\|1\|^2}\, 1.$$

$\langle 1, t\rangle = \int_0^2 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$. $\|1\|^2 = \int_0^2 1 dt = 2$. Logo uma base ortogonal de U é:

$$\{1, t-1\}.$$

Então

$$\text{proj}_U(e^t) = \frac{\langle e^t, 1\rangle}{\|1\|^2}\, 1 + \frac{\langle e^t, t-1\rangle}{\|t-1\|^2}\, (t-1).$$

$\langle e^t, 1\rangle = \int_0^2 e^t dt = \left[e^t\right]_0^2 = e^2 - 1$.
$\|t-1\|^2 = \langle t-1, t-1\rangle = \int_0^2 (t-1)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} + t - t^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 4 = \frac{2}{3}$.
$\langle e^t, t-1\rangle = \int_0^2 e^t(t-1) dt = \left[(t-1)e^t - e^t\right]_0^2 = 2$. Logo

$$\text{proj}_U(e^t) = \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{3}{2}2(t-1) = \frac{1}{2}(e^2-7) + 3t.$$

□

Q 8. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}),$$

e seja U o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ dado por $U = [x-1, x-2]$. Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{x-1,\ x-2\}$ de U, obtemos a base ortogonal:

(a) $\{x-1,\ x+2\}$;

(b) $\{x-1,\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\}$;

(c) $\{x-1,\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$;

(d) $\{x-1,\ -x-2\}$;

(e) $\{x-1,\ -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\}$.

Solução: O método de ortogonalização de Gram-Schmidt diz que o primeiro elemento da base ortogonal é $x-1$. O segundo elemento é obtido da seguinte forma:

$$x - 2 - \frac{\langle x-2, x-1\rangle}{\|x-1\|^2}\, (x-1).$$

$\langle x-2, x-1\rangle = (-3)(-2) + (-2)(-1) + 0 + 0 = 8$

$\|x-1\|^2 = \langle x-1, x-1\rangle = (-2)^2 + (-1)^2 + 0 + 1^2 = 6.$

Assim temos que

$$x - 2 - \frac{\langle x-2, x-1\rangle}{\|x-1\|^2}(x-1) = x - 2 - \frac{8}{6}(x-1) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

□

Q 9. Seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker T = W$ e $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1),(0,0,1)]$;

(b) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\ker T = W$, $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1)]$ e $T(1,1,0) = (2,2,-2)$;

(c) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\ker T = W$ e $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1)]$;

(d) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker T = W$, $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1),(0,0,1)]$;

(e) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker T = W$ e $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1)]$.

Solução: W tem dimensão 2. Por exemplo, uma base de W é $\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$. Uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém a base de W anterior é, por exemplo, $\{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,0)\}$. Como queremos transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\operatorname{Ker}(T) = W$, temos que definir T como $T(1,-1,0) = T(0,1,-1) = (0,0,0)$. Como $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$, temos que $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$. O elemento da base $(1,1,0)$ pode ser enviado onde quisermos que esteja em $[(1,1,-1)]$, pois queremos que $\Im T = [(1,1,-1)]$. Assim podemos definir, por exemplo, $T(1,1,1) = a(1,1,-1)$ para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Logo, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, temos uma única transformação linear $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to R^3$ dada por $T_a(1,-1,0) = (0,0,0)$, $T_a(0,1,-1) = (0,0,0)$ e $T_a(1,1,0) = a(1,1,-1)$.

Assim existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\ker T = W$ e $\operatorname{Im} T = [(1,1,-1)]$. □

Q 10. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = \int_0^{33333} p(t)q(t)dt.$$

Seja $U = [1 + x,\, x^2]$, $\quad p, q \in P_5(\mathbb{R})$, e o subespaço U de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $U = [1 + x, x^2]$. Sejam $T\colon P_5(\mathbb{R}) \to U$ e $S\colon P_5(\mathbb{R}) \to U^\perp$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = \operatorname{proj}_U(p), \qquad S(p) = \operatorname{proj}_{U^\perp}(p),$$

para todo $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(a) Existe uma transformação linear sobrejetora $L\colon U^\perp \to \mathbb{R}^5$;

(b) Existe uma transformação linear injetora $L\colon U^\perp \to \mathbb{R}^5$;

(c) T é sobrejetora;

(d) se $L\colon P_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ é uma transformação linear, então $\dim \operatorname{Ker} L \geq 1$;

(e) S é sobrejetora.

Solução: (a) é falsa. Sabemos que $\dim P_5(\mathbb{R}) = 6$. Como $\dim U = 2$, temos que $\dim U^\perp = 4$. Dada uma transformação linear $L\colon U^\perp \to \mathbb{R}^5$, temos que $4 = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$. Se L for sobrejetora teríamos que $\dim \operatorname{Im}(L) = 5$, o que é impossível pois $\dim \operatorname{Ker}(L) \geq 0$. $\square$