Q1. Seja U um espaço vetorial com $\dim(U) = 200$. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : U \to U$ tal que:

$$20 \dim(\mathrm{Ker}(T)) + 30 \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3500;$$

(II) se $T : U \to U$ é uma transformação linear tal que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 150$, então a imagem de T não está contida em $\mathrm{Ker}(T)$;

(III) se $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 185$, então a imagem de T está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $v, w \in V$. Temos que $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se:

(a) os vetores v e w são linearmente dependentes;
(b) $v = 0$ ou $w = 0$;
(c) existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu < 0$ e $w = \mu v$;
(d) os vetores v e w são linearmente independentes;
(e) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$ e $v = \lambda w$.

Q3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V. Sejam $x, y \in V$ tais que $\|x\| = \|y\|$. Pode-se afirmar que:

(a) $x - y$ é ortogonal a $x + y$;
(b) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \|y\|^2$;
(c) $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$ e $y = \sum_{i=1}^n \langle y, u_i\rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$;
(d) se $n \geq 2$, então $\mathrm{proj}_{[u_1,u_2]}(x + y) = \langle x + y, u_1\rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} + \langle x + y, u_2\rangle \frac{u_2}{\|u_2\|^2}$;
(e) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Q2) Se $\{v, w\}$ é LD é claro que vale a igualdade

Vamos provar a recíproca

Se $v = 0$ ou $w = 0$ nada temos a demonstrar.

Suponha primeiro que $\langle v, w\rangle \geq 0$. Então $\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|$.

Calcule e verifique que

$\langle \|v\| w - \|w\| v, \|v\| w - \|w\| v\rangle = 0$

Se $\langle v, w\rangle < 0$ então $\langle v, w\rangle = -\|v\|\|w\|$

Mostre que

$\langle \|v\| w + \|w\| v, \|v\| w + \|w\| v\rangle = 0$

Q5. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W um subespaço de V com dimensão finita e igual a m. Sejam $x \in V$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W. Considere o seguinte sistema linear com m equações e incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{cases} \langle w_1, w_1 \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_1 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_1 \rangle \alpha_m = \langle x, w_1 \rangle, \\ \langle w_1, w_2 \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_2 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_2 \rangle \alpha_m = \langle x, w_2 \rangle, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle w_1, w_m \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_m \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_m \rangle \alpha_m = \langle x, w_m \rangle. \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta:

(a) esse sistema pode ter infinitas soluções;
(b) esse sistema tem solução se, e somente se, a base $\mathcal{B}$ for ortonormal;
(c) esse sistema necessariamente tem solução;
(d) esse sistema tem solução se, e somente se, a base $\mathcal{B}$ for ortogonal;
(e) esse sistema não pode ter solução.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que:

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos $v, w \in V$. Assinale a alternativa correta:

(a) é possível que T não seja nem injetora nem sobrejetora;
(b) T é necessariamente bijetora;
(c) T é necessariamente igual à aplicação identidade;
(d) T é necessariamente injetora, mas pode não ser sobrejetora;
(e) é possível que T seja sobrejetora e não injetora.

Q5) A solução do sistema é a projeção ortogonal do vetor x no subespaço W.
Como W tem dimensão finita, $\exists \, \text{proj}_W x$.
O sistema dá as coordenadas da $\text{proj}_W x$ na base $\mathcal{B}$.

Q6) $T(v) = 0 \iff v = 0$ é consequência da condição dada.
Logo T é injetora.
Como $\dim \text{Im}\, T = \dim V$, segue que T é sobrejetora.

Q9. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^{t}A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X. Seja W o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^{t} = -X\}.$$

A dimensão de $W^{\perp}$ é igual a:

(a) 4;
(b) 1;
(c) 3;
(d) 2;
(e) 0.

Q10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno canônico. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + y = 0 \text{ e } -2x + z + 3t = 0\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $U^{\perp} = [(-2, 0, 1, 3), (1, 1, 3, 2)]$;
(b) $U^{\perp} = [(1, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 3)]$;
(c) $U^{\perp} = [(-2, 0, 1, 3), (-1, 1, 0, 0)]$;
(d) $U^{\perp} = [(-2, 0, 1, 3)]$;
(e) $U^{\perp} = [(-1, 1, 0, 0)]$.

Q9) Quando uma matriz $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in W$?

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y \\ -z & -w \end{bmatrix}$$

$\iff x = w = 0 \quad z = -y$.

Logo $W = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right]$.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W^{\perp} \iff \mathrm{tr}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$

$b - c = 0$

$$W^{\perp} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

e $\dim W^{\perp} = 3$.

Q11. Considere o espaço vetorial $C([0,2])$ munido do produto interno:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f,g \in C([0,2]),$$

e seja U o subespaço de $C([0,2])$ dado por $U = [1,t]$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 7) + 3t$;
(b) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 5t$;
(c) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 3t$;
(d) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 7t$;
(e) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 15) + 7t$.

Q12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V tal que vale a seguinte condição: para todo $v \in V$, se $\langle v, v_i\rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, então $v = 0$. Assinale a alternativa correta:

(a) E é necessariamente uma base de V;
(b) E pode ser linearmente dependente;
(c) E é necessariamente uma base ortogonal de V;
(d) E necessariamente gera V, mas pode não ser linearmente independente;
(e) E não pode ser uma base de V.

Q.12) De fato

Seja $S = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ o subespaço gerado pelos v_i, $1 \leq i \leq n$.
Se $\dim S = n$, então $S = V$, pois ambos tem a mesma dimensão.
Suponhamos então, que $\dim S < n$.
Neste caso $V = S \oplus S^\perp$ com $\{0\} \neq S^\perp$.
Tome $0 \neq v \in S^\perp$. Para este vetor $\langle v, v_i \rangle = 0$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$ e $v \neq 0$
Contradição.

Q15. Considere o espaço vetorial $C([-\pi,\pi])$ munido do produto interno:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f,g \in C([-\pi,\pi]).$$

Seja W o subespaço de $C([-\pi,\pi])$ dado por $W = [1, \operatorname{sen} t, \cos t]$ e recorde que o conjunto $\{1, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ é ortogonal. O vetor de W mais próximo de $f(t) = t$ é:

(a) $2 \operatorname{sen} t$;
(b) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos t$;
(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$;
(d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$;
(e) $2 \cos t$.

Q16. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p,q\rangle = \int_{0}^{33333} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \quad p,q \in P_5(\mathbb{R}),$$

e o subespaço U de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $U = [1+x, x^2]$. Sejam $T : P_5(\mathbb{R}) \to U$ e $S : P_5(\mathbb{R}) \to U^\perp$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = \operatorname{proj}_U p, \quad S(p) = \operatorname{proj}_{U^\perp} p,$$

para todo $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) existe uma transformação linear sobrejetora $L : U^\perp \to \mathbb{R}^5$;
(b) existe uma transformação linear injetora $L : U^\perp \to \mathbb{R}^5$;
(c) T é sobrejetora;
(d) se $L : P_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ é uma transformação linear, então a dimensão de $\operatorname{Ker}(L)$ é maior ou igual a 1;
(e) S é sobrejetora.

Q 15) $\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$

$\|\operatorname{sen} t\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2t)\,dt$

$= \pi$

$\|\cos t\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2t)\,dt = \pi$

$\langle 1, \operatorname{sen} t\rangle = \langle 1, \cos t\rangle = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle = 0.$

$\operatorname{proj}_W f(t) = \langle t, 1\rangle \frac{1}{\|1\|^2} + \langle t, \operatorname{sen} t\rangle \frac{\operatorname{sen} t}{\|\operatorname{sen} t\|^2}$

$+ \langle t, \cos t\rangle \frac{\cos t}{\|\cos t\|^2}$

$\langle t, 1\rangle = 0$, $\langle t, \operatorname{sen} t\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} t\,dt = 2\pi$

$\langle t, \cos t\rangle = 0$. Logo

$\operatorname{proj}_W f(t) = 0 + 2\pi \frac{(\operatorname{sen} t)}{\pi} + 0 = 2 \operatorname{sen} t$