Q1. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(-1,2),(1,-1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,2,1),(2,1,0),(-1,0,1)\},$$

de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(1,2)$ é igual a:

(a) $(-9,5,13)$;
(b) $(1,1,4)$;
(c) $(-7,-1,3)$;
(d) $(3,-1,10)$;
(e) $(1,-1,3)$.

Resolução: Primeiro calculemos $(1,2)$ em relação à base B. Fazendo $(1,2) = x(-1,2) + y(1,-1)$ e resolvendo o sistema, encontramos $(1,2) = (3,4)_B$. Assim, temos

$$[T(1,2)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Logo, $T(1,2) = 3(1,2,1) - 1(2,1,0) + (-1,0,1) = (-9,5,13)$.

Q2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x,y) = (3x - y, 2x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que $T^{2014}(0,1)$ é igual a:

(a) $(1 - 2^{2014}, 2 - 2^{2014})$;
(b) $(1, 1 - 3^{2014})$;
(c) $(2^{2015}, 2 - 3^{2014})$;
(d) $(1 - 2^{2014}, 2^{2015})$;
(e) $(1 - 2^{2015}, 1 - 3^{2014})$.

Resolução Para resolvermos esse problema é necessário diagonalizar o operador T. A matriz de T em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. O polinômio característico $c_T(x)$ é $x^2 - 3x + 2$. Logo, os autovalores de T são 1 e 2. Resolvendo os sistemas $[T]X = X$ e $[T]X = 2X$ encontramos os autovetores $(1, 2)$ e $(1, 1)$ associados a 1 e 2, respectivamente. Logo, tomando $B = \{(1, 2), (1, 1)\}$, temos

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{CAN,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa dessa última matriz temos:

$$M_{CAN,B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos $[T] = M_{CAN,B}[T]_B M_{CAN,B}^{-1}$ e $[T]^{2014} = M_{CAN,B}[T]_B^{2014} M_{CAN,B}^{-1}$.

Portanto

$$[T]^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o produto dessas três matrizes, e multiplicando pelo vetor-coluna $(0, 1)$ chegamos ao resultado $(1 - 2^{2014}, 2 - 2^{2014})$.

Q3. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(p) = \big(p(0), p'(1), p''(2)\big), \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Sejam $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Se a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

então $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$ é igual a:

(a) $x^2 + 3$;

(b) $2x^2 - 3$;

(c) $x^2 - 2x + 2$;

(d) $-x^2 + 2x + 2$;

(e) $2x^2 - 2x + 3$.

Resolução: Considere $C = \{1, x, x^2\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$. Temos

$$[T]_{C,Can} M_{CB} = [T]_{B,Can}.$$

Lembrando que M_{CB} é uma matriz de mudança de base em $P_2(\mathbb{R})$. Como as colunas de M_{CB} representam as coordenadas dos vetores de B em relação à base C, encontrando essa matriz obtemos facilmente os polinômios de B. Para isolar M_{CB} na equação acima multiplicamos os dois lados, à esquerda, pela inversa de $[T]_{C,Can}$, obtendo

$$M_{CB} = [T]^{-1}_{C,Can} [T]_{B,Can}.$$

A matriz $[T]_{B,Can}$ é a dada pelo enunciado. Para calcularmos a matriz $[T]_{C,Can}$ Precisamos calcular $T(1)$, $T(x)$ e $T(x^2)$, escrevendo os resultados nas colunas da matriz, obtendo:

$$[T]_{C,Can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa obtemos:

$$[T]^{-1}_{C,Can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando essa matriz por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtemos

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $B = \{1 + \frac{1}{2}x, 2, -\frac{1}{2}x + x^2$. Somando os três polinômios encontramos $x^2 + 3$, que é a resposta do exercício.

Resolução alternativa: As colunas da matriz $[T]_{B,Can}$ são as coordenadas de $T(p)$ em relação à base canônica, para cada p na base B. Assim, sendo $ax^2 + bx + c$ o primeiro polinômio da base B, temos:

$$T(ax^2 + bx + c) = (1, 1, 0).$$

Por outro lado, é fácil verificar que $T(ax^2 + bx + c) = (c, 2a + b, 2a)$. Assim, igualando $(c, 2a + b, 2a) = (1, 1, 0)$, resolvemos o sistema para encontrarmos o primeiro polinômio da base B. Fazendo o mesmo com os vetores $(2, 0, 0)$ e $(0, 1, 2)$ encontramos os outros polinômios.

Q4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:

(I) se T e S são operadores simétricos, então o operador $T + S$ é diagonalizável;

(II) se T é um operador simétrico invertível, então o operador T^{-1} também é simétrico;

(III) T é invertível se, e somente se, 0 não é um autovalor de T.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Resolução:

(I) Seja B uma base ortonormal de V. Temos, por um teorema, que $[T]_B$ e $[S]_B$ são matrizes simétricas. Logo, $[T]_B + [S]_B$ também é uma matriz simétrica. Como $[T]_B + [S]_B = [T + S]_B$, pelo mesmo teorema temos que $T + S$ é simétrico e, portanto, diagonalizável. Afirmação verdadeira.

(II) Assumimos que T é simétrico e invertível. Para quaisquer $u, v \in V$ temos $< T^{-1}(u), v >=< T^{-1}(u), T(T^{-1}(v)) >=< T(T^{-1}(u)), T^{-1}(v) >=< u, T^{-1}(v) >$. Afirmação verdadeira.

(III) Vimos que um operador linear $T : V \longrightarrow V$, quando V tem dimensão finita, é sobrejetor em relação a V se, e somente se, é injetor. Logo, T é invertível se, e somente se, T é injetor. Por um teorema vimos que isso equivale a dizer que $Ker(T) \neq \{0\}$, isto é, que existe um vetor não-nulo v tal que $T(v) = 0$. Mas isso significa dizer que 0 é um autovalor de T.

Concluímos que todas as afirmações são verdadeiras.

Q5. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x, x^3-1\}, \quad \mathcal{C} = \{2, x-1, x^2+1\},$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e de $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

O núcleo de T é gerado pelo vetor:

(a) $2x^3 - x^2 + 2x + 4$;
(b) $3x^3 + 3x^2 - x + 2$;
(c) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;
(d) $3x^3 + x^2 - 2x + 1$;
(e) $3x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Resolução: Para determinarmos o núcleo de T montamos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = b = -3c$ e $d = -2c$. Escolhendo $c = -1$, encontramos $(3, 3, -1, 2)_B$ como gerador do núcleo de T (lembrando que a matriz está em relação à base B, no domínio). Portanto, o núcleo é gerado por $3(1) + 3(x+1) - 1(x^2+x) + 2(x^3-1) = 2x^3 - x^2 + 2x + 4$, que é a resposta da questão (poderia ser qualquer outro múltiplo desse polinômio).

Q6. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A respeito delas, pode-se afirmar que:

(a) apenas A e C são diagonalizáveis;
(b) apenas A e B são diagonalizáveis;
(c) apenas B e C são diagonalizáveis;
(d) todas são diagonalizáveis;
(e) nenhuma delas é diagonalizável.

Resolução: A matriz A é simétrica e, portanto, diagonalizável. A matriz B tem polinômio característico $(2-x)(3-x)(x^2+2)$ e, portanto, não é diagonalizável, pois possui raízes não-reais. A matriz C tem polinômio característico $(2-x)(-1-x)((2-x)^2-1)$, que tem raízes 2, -1, 1 e 3. Como a matriz tem ordem quatro e possui quatro autovalores distintos então C é diagonalizável.

Q7. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x,y) = (ax - y, x + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

(a) $a < -1$ ou $a > 3$;
(b) $a \leq -1$ ou $a \geq 3$;
(c) $0 \leq a \leq 2$;
(d) $a < 0$ ou $a > 2$;
(e) $-1 < a < 3$.

Resolução: O polinômio característico de T é $x^2+(a+1)x+(a+1)$. O discriminante Δ desse polinômio de segundo grau é $(a+1)^2-4(a+1)$, que podemos escrever como $(a+1)(a-3)$. Temos que, se $\Delta>0$, T tem dois autovalores distintos e, portanto, é diagonalizável. Logo, é diagonalizável se $a<-1$ ou $a>3$. Se $-1<a<3$ temos que $\Delta<0$ e, portanto, T não possui autovalores reais e não é diagonalizável. Nos casos $a=-1$ e $a=3$, temos que T tem um único autovalor e precisamos analisar a multiplicidade geométrica desse.

Se $a=-1$, o polinômio característico é x^2, que tem 0 como única raiz. Como o operador T não é o operador nulo, está claro que a multiplicidade geométrica de 0 não pode ser 2 e, portanto, T não é diagonalizável se $a=-1$.

Se $a=3$, obtemos o autovalor 2. Resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

percebemos que (x,y) resolve o sistema se, e somente se, $x=y$. Portanto, os autoespaço associado a 2 é gerado por $(1,1)$, e tem dimensão 1. Logo, T também não é diagonalizável quando $a=3$.

Concluímos, então, que T é diagonalizável se, e somente se $a<-1$ ou >3.

Q8. Sejam a e b números reais distintos, V um espaço vetorial de dimensão finita e $T:V\to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja $p(x)=(x-a)^2(b-x)$. Sejam v_1, v_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor a e w_1, w_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor b. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) v_1+w_1 é um autovetor de T;

(b) se $v_1+v_2\neq 0$, então v_1+v_2 é um autovetor de T;

(c) o conjunto $\{w_1,w_2\}$ é linearmente dependente;

(d) se o conjunto $\{v_1,v_2\}$ é linearmente independente, então T é diagonalizável;

(e) o conjunto $\{v_1,w_1\}$ é linearmente independente.

Resolução:

(a) A única alternativa falsa. Se v_1+w_1 for autovetor de T associado a a, temos que $w_1=(v_1+w_1)-v_1$ é combinação linear de autovetores de T

associados a a e, portanto, ou é um autovetor associado a a ou é o vetor nulo, e em ambos os casos isso contradiz com o fato de w_1 ser autovetor associado a b, com $b \neq a$.

(b) Verdadeiro, pois vimos que combinações lineares de autovetores associados a um mesmo autovalor ou é autovetor ou é o vetor nulo.

(c) Verdadeiro, pois a multiplicidade geométrica nunca é maior que a multiplicidade algébrica. Como b tem multiplicidade algébrica 1, concluímos que a dimensão do autoespaço associado a b não pode ser maior do que 1. Logo, não existem dois autovetores associados a b que são linearmente independentes.

(d) Verdadeiro. Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, $\{v_1, v_2\}$ linearmente independente implica que $\{v_1, v_2, w_1\}$ é também linearmente independente e, portanto, uma base do espaço formada por autovetores de T.

(e) Verdadeiro, pois autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Q9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (x + 2y, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que:

$$[T \circ S]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^2$. A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $[5(S^2 + \mathrm{I})]_{\mathrm{can}}$ é igual a:

(a) 5;
(b) 7;
(c) -5;
(d) -7;
(e) 12.

Resolução: $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Claramente a matriz $[T]_{can}$ é invertível pois o determinante é diferente de zero. A inversa é $([T]_{can})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pela teoria sabemos que $[T \circ S]_{can} = [T]_{can} \cdot [S]_{can}$. Logo, como $[T]_{can}$ é invertível, temos que $[S]_{can} = ([T]_{can})^{-1} \cdot [T \circ S]_{can} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

De novo pela teoria,

$$\begin{aligned} [5(S^2 + I)]_{can} &= 5(([S]_{can})^2 + [I]_{can}) \\ &= 5\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A soma dos elementos da diagonal é 5.

Q10. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ e $S : P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R}),$$
$$S(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

e seja $H : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $H = S \circ T$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $\mathrm{Ker}(H - \mathrm{I}) = [x^2]$, onde I denota o operador identidade de $P_2(\mathbb{R})$;
(b) o polinômio característico de H é $p(t) = -t(1-t)^2$;
(c) H é diagonalizável;
(d) $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 1$;
(e) os únicos autovalores de H são 0 e 1.

Resolução:

Consideremos as bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C} = \{1, x\}$ de $P_1(\mathbb{R})$. Então temos

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} [H]_{\mathcal{B}} = [S \circ T]_{\mathcal{B}} &= [S]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{BC}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O polinômio característico de H é

$$p_H(t) = \det([H]_{\mathcal{B}} - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = t(1-t)^2.$$

Isso implica que os autovalores de H são 0 e 1.

Como 0 é uma raiz de multiplicidade algébrica 1 de $p_H(t)$ temos que $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 1$.

Para saber se H é diagonalizável, precisamos saber se a multiplicidade algébrica de 1 (que é dois) e a multiplicidade geométrica de 1 coincidem. A multiplicidade geométrica de 1 é a dimensão de $\mathrm{Ker}(H - I)$.

$$[H]_{\mathcal{B}} - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $v \in \mathrm{Ker}(H - I)$ se, e somente se, o seu vetor de coodenadas $(v)_{\mathcal{B}}$ é tal que $([H]_{\mathcal{B}} - I)(v)_{\mathcal{B}} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como a sistema tem duas variáveis livres, temos que $\dim(\mathrm{Ker}(H-I)) = 2$. Assim coincidem as multiplicidades algébrica e geométrica de 1. Logo H é diagonalizável.

Como $\dim(\mathrm{Ker}(H-I)) = 2$ temos que $\mathrm{Ker}(H-I)) \neq [x^2]$ e a alternativa (a) é falsa.

Q11. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Se $\mathrm{Ker}(T) = [e_1+e_2+e_3]$, o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-2)^2$ e T é diagonalizável, então $a^2 - b^2 + c^2$ é igual a:

(a) 4;

(b) 1;

(c) 9;

(d) 7;

(e) 3.

Resolução: A condição $\mathrm{Ker}(T) = [e_1 + e_2 + e_3]$ implica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $a + b + c = 0$.

Como $p(t) = t(t-2)^2$, temos que

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 1-t & 0 \\ a & b & c-t \end{pmatrix} = (c-t)(t-2)t.$$

Logo $c = 2$.

Como T é diagonalizável, temos que $\dim(\operatorname{Ker}(T-2I)) = 2$. Isso implica que o sistema

$$([T]_{\mathcal{B}} - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem duas variáveis livres. Isso implica $a = b$.

Logo temos que $a^2 - b^2 + c^2 = 4$.

Q12. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é sobrejetor se, e somente se, para toda base $\mathcal{B}$ de U, vale que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diferente de zero;

(II) se T não for injetor, então existe uma base $\mathcal{B}$ de U tal que, para toda base $\mathcal{C}$ de U, a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ contém uma coluna de zeros;

(III) se $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base de U, $\mathcal{E} = \{e_2, e_3, e_1\}$ e:

$$[T]_{\mathcal{DE}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $T^3 = 0$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Resolução: (I) é verdadeira.

Como U é de dimensão finita, temos que T é sobrejetor se, e somente se, T é bijetor. Agora, pela teoria, sabemos que T é bijetor se, e somente se, $[T]_{\mathcal{B}}$ é invertível para toda base $\mathcal{B}$ de U, se, somente se, $\det[T]_{\mathcal{B}} \neq 0$ para toda base $\mathcal{B}$ de U.

(II) é verdadeira.

Se T não for injetor, temos que $\operatorname{Ker} T \neq 0$. Seja $\{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base de $\operatorname{Ker} T$. Acrescentamos vetores de U até obter uma base $\mathcal{B} =$

$\{u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ de U. Como $T(u_1) = 0$, temos que para qualquer base $\mathcal{C}$ de U a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ tem a primeira coluna zero.

(III) é verdadeira.

$$[T]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente $([T]_{\mathcal{B}})^3 = 0$. Isso implica que $T^3 = 0$.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$
$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é $p(t) = (2-t)(t-1)^2$. Suponha que $T(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$. Assinale a alternativa correta:

(a) $T(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(b) $T(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(c) $T(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(d) $T(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+z, \frac{5}{3}x+\frac{1}{3}y-z, x-y+z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(e) $T(x, y, z) = \left(\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução:

A partir do polinômio característico sabemos que os autovalores de T são 1 e 2. Como T é simétrico, e portanto, diagonalizável, sabemos que $\dim(\operatorname{Ker}(T - I)) = 2$ e que existe uma base formada por vetores prôprios.

Observa que como 2 é uma raiz simples de $p_T(t)$, temos que $V(2) = \operatorname{Ker}(T - 2I) = [(1, 1, 0)]$. Portanto, $\dim V(2)^{\perp} = 2$. Como T é simétrico temos que $V(1) = \operatorname{Ker}(T - I) \subseteq (\operatorname{Ker}(T - 2I))^{\perp}$. Mas como as dimensões coincidem temos que $\operatorname{Ker}(T - I) = \operatorname{Ker}(T - 2I)^{\perp}$.

Usando o produto interno dado temos que $\operatorname{Ker}(T - I) = \operatorname{Ker}(T - 2I)^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y = 0\} = [(-1, 2, 0), (0, 0, 1)]$.

Assim obtemos a base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,2,0),(0,0,1)\}$ formada por vetores prôprios. Em relação a essa base

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para obter o resultado precisamos calcular a matriz de T em relação à base canônica. Sabemos que $[T]_{can} = [I]_{\mathcal{B}\,can}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{can\,\mathcal{B}}$ onde $[I]_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ denota a matriz de mudança de base.

Temos que

$$[I]_{\mathcal{B}\,can} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [I]_{can\,\mathcal{B}} = ([I]_{\mathcal{B}\,can})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $T(x,y,z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z\right)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Q14. Considere as seguintes afirmações:

(I) se U é um espaço vetorial de dimensão 75, então existe um operador linear $T : U \to U$ tal que:

$$\operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) \cap \operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) \cap \operatorname{Ker}(T - 3\mathrm{I}) \neq \{0\},$$

onde I denota o operador identidade de U;

(II) se o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ está munido do seu produto interno canônico, U é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(U) = 1$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é o operador linear definido por $T(v) = \operatorname{proj}_U v$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(III) se $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ é um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (t-2)^4(t+3)^2$, então T é invertível.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Resolução: (I) é falsa pois sabemos que quaisquer dois vetores próprios u, v associados a autovalores diferentes λ, $\mu \in \mathbb{R}$ são linearmente independentes.

(II) é falsa.

Sabemos que $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$. Seja $\{u\}$ uma base de U, e $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $U^\perp$. Então $\mathcal{C} = \{u, v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. Em relação a esta base temos que

$$[T]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo os autovalores de T são 1 e 0 apenas. Se existisse uma base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_\mathcal{B}$ fosse como no enunciado, teríamos que 3 seria um autovalor de T.

(III) é verdadeira.

T é injetora se, e somente se, $\operatorname{Ker} T = 0$, se, e somente se, 0 não é um autovalor de T, se, e somente se, 0 não é uma raiz do polinômio característico.

Q15. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno canônico. Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \big\{(-1, 1), (1, 2)\big\},$$

e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é:

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T é simétrico;
(II) T não é diagonalizável;
(III) T é diagonalizável, mas não é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(e) nenhumas das afirmações é verdadeira.

Resolução: Sabemos que T é simétrico se, e somente se, a matriz de T em relação a uma base ortonormal é simétrica se, e somente se, a matriz de T em relação a qualquer base ortonormal é simétrica.

Como o produto interno considerado em $\mathbb{R}^2$ é o produto interno usual, temos que a base canônica é uma base ortonormal. Assim T é simétrico se, e somente se, $[T]_{can}$ é uma matriz simétrica.

Sabemos que $[T]_{can} = [I]_{\mathcal{B}\,can}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{can\,\mathcal{B}}$, onde $[I]_{\mathcal{F}\mathcal{G}}$ denota a matriz da identidade em relação as bases $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ ou, em outras palavras, a matriz de mudança de base. Agora $[I]_{\mathcal{B}\,can} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e sabemos que $[I]_{can\,\mathcal{B}} = ([I]_{\mathcal{B}\,can})^{-1}$. Logo $[I]_{can\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} [T]_{can} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que é uma matriz simétrica. Logo T é um operador simétrico.

Pela teoria sabemos que todo operador simétrico é diagonalizável. Logo a alternativa correta é (a).

Q16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (3x + y + z, y, x + 2y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

A soma dos autovalores de T é igual a:

(a) 7;
(b) 6;
(c) 5;

(d) 2;

(e) 3.

Resolução: Os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico de T. Agora $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Logo

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det([T]_{can} - tI) \\ &= \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 2 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)\det \begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(t^2 - 6t + 8). \end{aligned}$$

Logo as raízes de $p_T(t)$ são $1, 4, 2$. Logo a soma é 7.