MAT 2458 - Álgebra Linear para Engenharia II - Poli
2º semestre de 2014
1ª Lista de Exercícios

1. Verifique se $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição e de multiplicação por escalar dadas por:

   a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad \alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y).$

   b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1); \quad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$

   c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1); \quad \alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y).$

   d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1); \quad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1,\ \alpha y - \alpha + 1).$

   e) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad \alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha x_1).$

2. Seja $V = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x > 0\}$ com as operações de adição e de multiplicação por escalares dadas por $x \oplus y = xy$ e $\alpha \odot x = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Verifique que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x, y > 0\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalares dadas por $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$; e $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Verifique que W é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   b) Ache uma base de W.

4. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x$ é um número inteiro $\}$. c) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A$ é invertível $\}$.

   d) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

   e) $V = P(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(0) = 2p(1)\}$.

   f) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{a + bx^2 + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   g) $V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $S = \{f \in \mathcal{C}^2 \mid af'' + bf' + cf = 0\}$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são fixados.

5. Verifique se os dois conjuntos geram o mesmo subespaço do espaço vetorial V, nos seguintes casos:

   a) $S_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ $S_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$, quando $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $S_1 = \{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\}$, $S_2 = \{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$, quando $V = C(\mathbb{R})$, ou seja, $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f$ é contínua$\}$.

   c) $S_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$, $S_2 = \{1, 1 + t,\ 1 - t^2,\ 1 - t - t^2\}$, quando $V = P_3(\mathbb{R})$.

6. Sejam v_1, v_2, v_3 os vetores-linha e w_1, w_2, w_3 os vetores-coluna da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

   a) Verifique as relações: $v_3 = 2v_2 - v_1,\ w_3 = 2w_2 - w_1$.

   b) Exprima w_1 e w_2 como combinações lineares de v_1 e v_2 e vice-versa.

   c) Conclua que os vetores-linha e os vetores-coluna da matriz dada geram o mesmo subespaço.

   d) Dê um exemplo de uma matriz 3×3 cujos vetores-linha geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ diferente daquele gerado pelos seus vetores-coluna.

   e) É possível encontrar uma matriz 3×3 tal que a dimensão do espaço gerado pelos vetores-linha é diferente da dimensão do espaço gerado pelos vetores-colunas? Justifique sua resposta.

7. Ache uma solução não-trivial para o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.
   A partir daí obtenha uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $v_3 = (3, 1, 1)$ e $v_4 = (4, -1, -2)$ na qual os coeficientes não são todos iguais a zero.

8. Considere a relação $\alpha x + \beta x^2 \operatorname{sen} x + \gamma \cos x = 0$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Atribuindo a x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$ e π, obtemos as equações

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi^2}{4}\beta = 0 \\ \pi\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

   a) Resolva o sistema linear acima.

   b) O conjunto $B = \{x, x^2 \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é "l.i." ou "l.d." em $C(\mathbb{R})$?

9. Verifique se o conjunto de funções B é "l.i." ou "l.d." em $C(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:

   a) $B = \{e^t, e^{2t}, e^{-t}\}$.

   b) $B = \{e^t, te^t\}$.

   c) $B = \{e^t, te^t, e^{2t}\}$.

   d) $B = \{\cos t, \cos 2t, \cos 3t\}$.

   e) $B = \{x, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

   f) $B = \{e^{2t}, e^{3t} \cos 4t, e^{3t} \operatorname{sen} 4t\}$.

10. Seja V um espaço vetorial e considere $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Sejam $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ números reais não-nulos. Prove, usando a definição de independência linear, que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente se e somente se $\{v_1, v_1 + \lambda_2 v_2, v_1 + \lambda_3 v_3, \dots, v_1 + \lambda_n v_n\}$ é linearmente independente.

11. Seja V um espaço vetorial. Prove que, se existe um conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3\} \subset V$ linearmente independente tal que $E \cup \{u\}$ é linearmente dependente qualquer que seja o vetor $u \in V$, então a dimensão de V é 3.

12. Sejam V um espaço vetorial e $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $v \in V$. O conjunto $A = \{v, v - e_1, v - e_2, v - e_3\}$ é um conjunto de geradores de V? O conjunto A pode ser linearmente independente? Justifique.

13. Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços vetoriais abaixo.

    a) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x - y = w \text{ e } x - 3y + w = 0\}$.

    b) $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A \text{ comuta com a matriz } 1 \quad -21 \quad 3\}$.

    c) $S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) | p(1) = p(-1) = 0\}$.

    d) $S = \{\, 2a \quad a + 2b0 \quad a - b \,| a, b \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

    e) $S = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 | x + y - az + 3w + t = 0 \text{ e } 2x - y + z + 2aw + 5t = 0\}$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

14. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

15. Seja $B = \{1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3\}$. Verifique que B é uma base para $P_3(\mathbb{R})$ e determine as coordenadas do polinômio $p(x) = x^3$ em relação à base B.

16. Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$.

    a) Verifique que B é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

    b) Determine $m, n, r, s \in \mathbb{R}$ para que as matrizes $P = (m, n, n, m)_B$ e $Q = \left\{ \begin{matrix} r & 1 \\ 2 & s \end{matrix} \right\}$ sejam iguais.

17. Considere o subespaço vetorial S de $P_3(\mathbb{R})$ dado por
$$S = [x^3 - x^2 + 1, x^3 + x^2 - x, x^3 + bx^2 + x + 2].$$
    Determine b de modo que S tenha dimensão 2.

18. Sejam $A = \{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\}$, $S = [A]$ e $v = (0, m, -m, 1, 1)$.

    a) Determine uma base de S.

    b) Determine todos os valores de m para os quais $v \in S$.

    c) Se $w \notin S$, temos $[A \cup \{w\}] = \{(x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5 | x = 0\}$?

19. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $p_1(t) = b(t + 1)$, $p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

20. Em $\mathbb{R}^5$, considere o subespaço $S = [A]$, em que

$$A = \{(1,0,-1,2,0),(2,1,3,0,0),(0,1,-5,4,0),(1,0,-11,10,0)\}.$$

a) Ache uma base B para S, *contida* em A.

b) Complete a base B do item **(a)** para uma base de $\mathbb{R}^5$.

c) Determine os valores de m para os quais $v \in S$, sendo $v = (4,-4,m^2,4m,0)$.

21. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,0)$ e $(1,1,2,1)$.

22. Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$.

a) Mostre que B é linearmente independente.

b) Determine uma base de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ que contenha B.

23. Considere o sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 12x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Determine uma base e a dimensão do subespaço das soluções do sistema.

24. Sejam $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x - y + z = 0 \right\}$ e $S_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$.
Seja $M = \left\{ \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{matrix} \right\}$. Verifique se $M \in S_1 \cap S_2$.

25. Seja $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p(-1) + p(1) = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$.

26. a) Mostre que são subespaços de $M_2(\mathbb{R})$ os subconjuntos:

$$S_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A^t = A\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A^t = -A\}.$$

b) Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} U &= \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) | a_{ij} = 0, \text{ se } i > j\} \\ T &= \{B = (b_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) | b_{ij} = 0, \text{ se } i < j\} \end{aligned}$$

Ache uma base e a dimensão de U, T e $U \cap T$.

27. Seja S o subespaço das soluções de um sistema linear homogêneo com sete equações e doze incógnitas. Quais os possíveis valores para $\dim S$?

28. Seja V um espaço vetorial de dimensão 5. Sejam S_1 e S_2 subespaços de V de dimensão 3. Prove que $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$.

29. Verdadeiro ou Falso? Justifique.

 a) Se S é o conjunto dos pontos (x, y, z) de uma reta r, então S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e somente se a reta r passa pela origem.

 b) Se $\alpha \neq 0$ então o subconjunto $\{(1-\alpha, 1+\alpha), (1+\alpha, 1-\alpha)\}$ é sempre uma base de $\mathbb{R}^2$.

 c) Se $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ são subconjuntos "l.i." de um espaço vetorial de dimensão n e $k + l = n$, então $S_1 \cup S_2$ é uma base de V.

 d) Se $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ são subconjuntos "l.i." de um espaço vetorial de dimensão n e se $S_1 \cup S_2$ é "l.i." então $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

 e) Se $S = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$ então $\dim S = p$.

 f) Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_5$ matrizes distintas em $M_2(\mathbb{R})$. Então $\{M_1, M_2, \ldots, M_5\}$ é gerador de $M_2(\mathbb{R})$.

Questões de múltipla escolha

30. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = A^t\} \quad \text{e} \quad T = \{A \in M_3(R) : \text{tr}(A) = 0\},$$

onde A^t denota a matriz transposta de A e $\text{tr}(A)$ denota o traço de A, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de A. Então, a dimensão de $S \cap T$ é igual a:

a) 3; b) 7; c) 6; d) 4; e) 5.

31. Considere as matrizes v_1, v_2, v_3, v_4 e w definidas abaixo:

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad v_2 = \begin{Bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad v_3 = \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad v_4 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ e } w = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Se (a, b, c, d) são as coordenadas de w com respeito à base $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, então $a - b - c + d$ é igual a

a) 2; b) 1; c) 0; d) 3; e) 4.

32. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$:

$$V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) + p(-1) = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\}.$$

Então, a dimensão de $V \cap W$ é igual a

a) 4; b) 3; c) 1; d) 0; e) 2.

33. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere os seguintes elementos do espaço vetorial$P_3(\mathbb{R})$:

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^3, \quad p_2(x) = x + x^2 - x^3, \quad p_3(x) = a + x + bx^2 + 5x^3.$$

Se $p_3(x) \in [p_1(x), p_2(x)]$, então $a + b$ é igual a

a) 1; b) 3; c) -2; d) 2; e) -1.

34. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita ≥ 4, seja $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ um subconjunto de V e seja $w \in V$. Se $E \cup \{w\}$ é um conjunto gerador para V, então pode-se afirmar que

a) $w \in [v_1, v_2, v_3]$.

b) $w \neq 0_V$.

c) o conjunto $E \cup \{w\}$ pode ou não ser linearmente independente.

d) o conjunto E é linearmente dependente.

e) $\dim([v_1, v_2] \cap [v_3, w]) \geq 1$.

35. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então o conjunto $\{a + x, 1 + bx + x^2, x + ax^2\}$ gera o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ se, e somente se,

a) $a(2 - ab) \neq 0$; b) $2 + ab \neq 0$; c) $ab \neq 0$; d) $a(1 - b) \neq 1$; e) $a \neq 0$.

36. Seja $S = [(1, 0, -1, 1), (1, 1, b, 1), (0, a, a, 1)] \subset \mathbb{R}^4$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Assinalar a afirmação verdadeira.

a) e $a = 0$ então $\dim(S) = 2$ para todo b.

b) se $b = 0$ então $\dim(S) = 2$ para todo a.

c) A dimensão de S é 3 se e somente se $a = b = 0$.

d) A dimensão de S é 2 se e somente se $a = b = 0$.

e) A dimensão de S é 3 para todo a e b.

37. Considere os seguintes subconjuntos do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t) = f(t+1), \forall t \in \mathbb{R}\} \\ S_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t) \text{ é inteiro, para todo} t \in \mathbb{R}\} \\ S_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t+s) = f(t) + f(s), \forall t, s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Assinalar a afirmação verdadeira.

a) Apenas S_1 é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

b) Apenas S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

c) Apenas S_1 e S_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

d) Apenas S_1 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

e) S_1, S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

38. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e 0_V o elemento neutro da adição em V. Seja S um subconjunto de V. Então a afirmação **falsa** é:

a) se 0_V é um elemento de S então S é um subespaço de V.

b) se S é um subespaço de V então $0 \leq \dim(S) \leq n$.

c) se B é um subconjunto linearmente independente de V com n elementos, então B é uma base de V.

d) se B é um conjunto gerador de V com n elementos, então B é uma base de V.

e)toda base de V tem n elementos.

39. Seja $B = \{1, \mathrm{sen}(ax), \mathrm{sen}(x)\}$, $a \in \mathbb{R}$. Então podemos afirmar que:

a) O conjunto B é sempre linearmente dependente.

b) O conjunto B é linearmente dependente se e somente se $a = 0$.

c) O conjunto B é linearmente independente se e somente se $a \neq 0, a \neq 1$ e $a \neq -1$.

d) O conjunto B é linearmente dependente se e somente se $a = 1$ ou $a = -1$.

e) O conjunto B é sempre linearmente independente.

40. A dimensão do subespaço $[t, e^t, t - e^t, te^t, t + e^t]$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é

a) 4; b) 2; c) 1; d) 3; e) 5.

41. Seja $V = P_{20}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 20 com coeficientes reais. Considere as seguintes afirmações:

I. Um subconjunto de V com 20 vetores é sempre linearmente independente.

II. Um subconjunto de V com 20 vetores está sempre contido em uma base de V.
III. Um subconjunto de V com 20 vetores não gera V.

Então podemos afirmar que:

a) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

42. Seja $S = \{A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) | a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}\}$. Pode-se afirmar que

a) S não é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$.

b) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 7$.

c) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 6$.

d) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 1$.

e) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 3$.

43. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere os conjuntos

$$A = \{1+t, t+t^3\}, \quad B = \{1+2t+t^3, 1-t^3\} \quad \text{e} \quad C = \{1+3t+t^3, t^2\}.$$

Assinale a alternativa correta.

a) $[C] \subset [B]$, mas $[C] \neq [B]$;

b) $[A] = [C]$;

c) $[B] = [C]$;

d) $[C] \subset [A]$, mas $[C] \neq [A]$;

e) $[A] = [B]$.

44. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $S_1 = [(1,0,-1),(1,2,1)]$ e $S_2 = [(1,1,1),(1,0,0)]$.

a) Determine $S_1 + S_2$.

b)Ache uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

45. Os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3,2}(R)$ são dados por

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \\ c & a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } S_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \right].$$

Ache uma base e a dimensão dos subespaços S_1, S_2, $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.

46. Seja V um espaço vetorial de dimensão 5. Sejam S_1 e S_2 subespaços de V de dimensão 3. Prove que $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$.

47. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+z=t\}, \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0, z-t=0\}.$$

Determine as dimensões de $U+W$ e $U \cap W$.

48. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}, \quad W = \{(x,-x,x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:

a) $\dim(U+W) = 3$;

b) $\dim(W) = 1$;

c) o conjunto $U \cup W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;

d) $\dim(U) = 2$;

e) $\dim(U \cap W) = 0$.

49. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 7, S_1 e S_2 subespaços de V tais que $V = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. Pode-se afirmar que:

a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$.

b) $\dim(S_1 \cap S_2)$ é ímpar.

c) $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 3$.

d) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 5$.

e) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$.

50. Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial E, B_1 é uma base de S_1 e B_2 é uma base de S_2 então a respeito de $B = B_1 \cup B_2$ pode-se afirmar que:

a) é um conjunto linearmente independente, mas pode não gerar $S_1 + S_2$.

b) é um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$, mas pode não ser linearmente independente.

c) é uma base de $S_1 + S_2$.

d) não é uma base de $S_1 + S_2$.

e) pode não ser nem linearmente independente, nem um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$.

51. Seja $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) + p(1) = 0\}$.

a) Mostre que S é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$.

b) Determine um subespaço W de $P_3(\mathbb{R})$ tal que $S \oplus W = P_3(\mathbb{R})$.

52. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ como espaço vetorial.

a) Mostre que são subespaços de V os subconjuntos:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{A \in V : A = -A^t\}.$$

b) Prove que $M_2(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$.

c) Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:

$U = \{A = (a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ e $T = \{B = (b_{ij}) \in V : b_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$.

Ache as dimensões de $U, T, U + T$ e de $U \cap T$.

53. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

54. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Ache todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

55. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V:

(A)	$\|u\| = \|v\|$;	(I)	$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$;
(B)	$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;	(II)	$\langle u+v, u-v\rangle = 0$;
(C)	$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$;	(III)	$\langle u, v\rangle = 0$.

Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:

a) (A) $\Longleftrightarrow$ (III), (B) $\Longleftrightarrow$ (II), (C) $\Longleftrightarrow$ (I).

b) (A) $\Longleftrightarrow$ (II), (B) $\Longleftrightarrow$ (I), (C) $\Longleftrightarrow$ (III).

c) (A) $\Longleftrightarrow$ (I), (B) $\Longleftrightarrow$ (III), (C) $\Longleftrightarrow$ (II).

d) (A) $\Longleftrightarrow$ (II), (B) $\Longleftrightarrow$ (III), (C) $\Longleftrightarrow$ (I).

e) (A) $\Longleftrightarrow$ (I), (B) $\Longleftrightarrow$ (II), (C) $\Longleftrightarrow$ (III).

56. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:

a) $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$;

b) $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

57. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a expressão:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\,\cos x - (ax+b)]^2\,dx$$

assume o seu valor mínimo. Assinale a alternativa correta:

a) $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$.

b) $a = b = 0$.

c) $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$.

d) $a = 0$ e $b = \pi$.

e) $a = \pi$ e $b = 0$.

58. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0,1]$ considerando em $\mathcal{C}([0,1])$ o produto interno usual, ou seja, o produto interno dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

59. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} , \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

a) Prove que $\langle A, B\rangle = Tr(B^t A)$, onde X^t denota a transposta de uma matriz X e $Tr(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal). b) Se $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W.

c) Se W é como em (b), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

60. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Calcule $proj_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $proj_{P_1(\mathbb{R})} x^3$.

61. Em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$ considere o subespaço $S = [1, \operatorname{sen} x, \cos x]$. Calcule $proj_S(x - 2)$.

62. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E então:

$$x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n \rangle e_n,$$

para todo $x \in E$;

(II) se $u, v \in E$ são linearmente independentes e se $w = v - proj_u v$ então w é ortogonal a u se e somente se $\|u\| = 1$;

(III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é linearmente independente e se $z = w - proj_u w - proj_v w$ então z é ortogonal a u e a v.

Assinale a alternativa correta:

a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

c) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

e) nenhuma das afirmações é verdadeira.

63. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $u, v \in V$ tais que $v \in S^{\perp}$ e $u - v \in S$. Pode-se afirmar que:

a) $\langle u, v \rangle = 0$.

b) $u \in S^{\perp}$.

c) $u = 0$.

d) $\langle u, v \rangle = \|v\|^2$.

e) $\langle u, v \rangle = \|u\|$.

64. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico e seja

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\}.$$

a) Determine uma base ortonormal de S.

b) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.

65. Considere em $P_3(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$. Seja

$$S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}.$$

a) Determine uma base ortonormal de S.

b) Dado $p \in P_3(\mathbb{R})$ encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^\perp$ tais que $p = p_1 + p_2$.

66. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno canônico) para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 2, -4, -3)$.

67. Considere em $P(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$.

a) Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.

b) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.

68. Considere a função definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

para todos $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

b) Encontre uma base de $S^\perp$, onde $S = [(1, 2, 0, -1)]$.

69. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, S um subespaço de E, B um subconjunto de S e C um subconjunto de $S^\perp$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

a) se B ẃ uma base de S e C é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ é uma base de E.

b) $B \cap C \subset \{0\}$.

c) se B e C são linearmente independentes então $B \cup C$ é linearmente independente.

d) se B é uma base de S e C é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ gera E, mas pode não ser linearmente independente.

e) se B gera S e C gera $S^\perp$ então $B \cup C$ gera E.

70. Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:

(I) $(S+T)^{\perp} \subset S^{\perp} \cap T^{\perp}$;

(II) Se E tem dimensão finita, então $\dim\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \dim S$;

(III) $S^{\perp} + T^{\perp} \subset (S \cap T)^{\perp}$.

Podemos afirmar que:

a) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita.

b) As três afirmações são falsas.

c) Apenas as afirmaç oes (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

e) As três afirmações são verdadeiras.

RESPOSTAS

1. a) não; b) não; c) não; d) sim; e) não

3. b) $\{(e,1),(1,e)\}$ é uma base, existem outras.

4. a) sim; b) não; c) não; d) não; e) sim; f) sim; g) sim.

5. a) sim; b) sim; c) não.

7. Uma solução não trivial é $(11,1,-15,8)$; combinação linear procurada: $11v_1 + v_2 - 15v_3 + 8v_4 = 0$.

8. a) $\alpha = \beta = \gamma = 0$; b) l.i.

9. a) l.i.; b) l.i.; c) l.i.; d) l.i.; e) l.i.; f) l.i.

12. A é gerador; A não é l.i.

13. a) $\{(2,1,0,1),(0,0,1,0)\}$, $\dim S = 2$.

b) $\left\{ \begin{matrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$, $\dim S = 2$.

c) $\{1-x^4, x-x^3, x^2-x^4\}$, $\dim S = 3$.

d) $\left\{ \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}, 0 \quad 20 \quad -1 \right\}$, $\dim S = 2$.

e) $\left\{(-2,1,0,0,1), (\frac{a-1}{3}, \frac{1+2a}{3}, 1, 0, 0),\ (\frac{-2a-3}{3}, \frac{2a-6}{3}, 0, 1, 0)\right\}$, $\dim S = 3$.

14. $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{2}$ e $a \neq \sqrt{2}$.

15. $(-3,1,0,1)$.

16. $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $r = 4$ e $s = -2$.

17. $b = -3$.

18. a) $\{(0,2,-1,0,1),(0,0,3,-1,2)\}$; b) $m = 6$; c) não.

19. $b \neq 0$ e $b \neq 2$.

20. a) $\{(1,0,-1,2,0),(2,1,3,0,0),\ (0,1,-5,4,0)\}$;

    b) $\{(1,0,-1,2,0),(2,1,3,0,0),\ (0,1,-5,4,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$.

    c) $m=1$ ou $m=-6$.

21. $\{(1,1,1,0),(1,1,2,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.

22. **(b)** $B \cup \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$.

23. A dimensão é 1 e uma base é $\{(1,-2,1,0)\}$.

24. $M \in S_1 \cap S_2$

27. $5 \leq \dim\ S \leq 11$

29. a) V; b) V; c) F; d) F; e) F; f) F.

Múltipla Escolha:

30. (e); 31. (e); 32. (e); 33. (e); 34. (b); 35. (a); 36. (e); 37. (d); 38. (a); 39. (c); 40. (d); 41. (e); 42. (b); 43. (e);

44. a) $\mathbb{R}^3$; b) dimensão 1, base $\{(0,1,1)\}$.

45. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de S_1, $\dim S_1 = 3$.

    $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de S_2, $\dim S_2 = 3$.

    $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 + S_2$, $\dim S_1 + S_2 = 5$.

    $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 \cap S_1$, $\dim S_1 \cap S_2 = 1$.

46. $\dim S_1 \cap S_2 \geq 1$.

47. $\dim(U+W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

52. Por exemplo, $W = [x^2]$.

53. Dimensões: $3, 3, 4, 2$.

54. $t > 0$.

55. $\{(a,2a) : a \in \mathbb{R}\}$; $\|(1,0)\| = \sqrt{2}$.

57. a) não existe λ; b) $\lambda = \frac{2}{3}$.

59. $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105)$.

60. b) Uma possível base é
$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

61. $\frac{1}{5}(14x + 3)$.

62. $\pi - 2 - 2\operatorname{sen} x$.

65. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1,2,6,-1)$.

b) Se $v = (x,y,z,w)$ então,
$v_1 = \frac{1}{7}(6x + 2y - z - w,$
$2x + 3y + 2z + 2w,$
$-x + 2y + 6z - w,$
$-x + 2y - z + 6w)$
e $v_2 = \frac{1}{7}(x - 2y + z + w,$
$-2x + 4y - 2z - 2w,$
$x - 2y + z + w,$
$x - 2y + z + w)$.

66. a) $\{\sqrt{3}\,(x-1), \sqrt{5}\,(4x^2 - 5x + 1), \sqrt{7}\,(15x^3 - 25x^2 + 11x - 1)\}$.

b) Se $f = a + bx + cx^2 + dx^3$ então, $p_1 = \frac{1}{4}((5a + b + c + d)-$
$(15a + 11b + 15c + 15d)x+$
$(45a + 45b + 49c + 45d)x^2-$
$(35a + 35b + 35c + 31d)x^3)$ e
$p_2 = \frac{1}{4}(a + b + c + d)(-1 + 15x - 45x^2 + 35x^3)$.

66. $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}),$
$(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5})\}$.

67. a) $\{1, 2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\}$.

b) $\{1, \sqrt{3}\,(2t - 1),$
$\sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$.

68. b) Uma possível base é
$\{(1,0,0,2), (0,1,0,2), (0,0,1,0)\}$.