$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de MAT2458
Escola Politécnica – $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014

1. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1 y_1 + t x_2 y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

2. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

   Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Ache todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

3. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V:

(A)	$\|u\| = \|v\|$;	(I)	$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$;
(B)	$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;	(II)	$\langle u + v, u - v \rangle = 0$;
(C)	$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$;	(III)	$\langle u, v \rangle = 0$.

   Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:

   (a) (A) $\Longleftrightarrow$ (III), (B) $\Longleftrightarrow$ (II), (C) $\Longleftrightarrow$ (I).

   (b) (A) $\Longleftrightarrow$ (II), (B) $\Longleftrightarrow$ (I), (C) $\Longleftrightarrow$ (III).

   (c) (A) $\Longleftrightarrow$ (I), (B) $\Longleftrightarrow$ (III), (C) $\Longleftrightarrow$ (II).

   (d) (A) $\Longleftrightarrow$ (II), (B) $\Longleftrightarrow$ (III), (C) $\Longleftrightarrow$ (I).

   (e) (A) $\Longleftrightarrow$ (I), (B) $\Longleftrightarrow$ (II), (C) $\Longleftrightarrow$ (III).

4. No espaço $P(\mathbb{R})$ dos polinômios, mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t)dt$ é um produto interno. Verifique por que não é um produto interno em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) embora o seja em $\mathcal{C}([a, b])$. Observe também que, mudando os valores de a e b, obtemos um produto interno diferente no mesmo espaço $P(\mathbb{R})$.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

   (I) Dados $v, w \in V$, v e w são ortogonais se, e somente se, $\|v + w\| = \|v - w\|$.

   (II) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ para todo $v, w \in V$.
   (Isso implica que se dois produtos internos em V têm as mesmas funções norma então eles são iguais).

   (III) Se $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ e $\langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$ para todo i, então $v = w$.

   Assinale a alternativa correta:

   a. As três afirmações são falsas.

   b. As três afirmações são verdadeiras.

   c. Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

   d. Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

   e. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

6. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considere as seguintes afirmações:

   (I) se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E então:
   $$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n,$$
   para todo $x \in E$;

   (II) se $u, v \in E$ são linearmente independentes e se $w = v - \operatorname{proj}_u v$ então w é ortogonal a u se e somente se $\|u\| = 1$;

   (III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é linearmente independente e se $z = w - \operatorname{proj}_u w - \operatorname{proj}_v w$ então z é ortogonal a u e a v.

   Assinale a alternativa correta:

   a. apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
   b. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
   c. apenas a afirmação (III) é verdadeira.
   d. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
   e. nenhuma das afirmações é verdadeira.

7. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:

   a. $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$;
   b. $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

8. Encontre uma base ortonormal para $P_2(\mathbb{R})$, com respeito ao produto interno $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

9. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno canônico) para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 2, -4, -3)$.

10. Considere em $P(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

    a. Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.
    b. Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.

11. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere o produto interno:
    $$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$
    Calcule $\operatorname{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $\operatorname{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Interprete o resultado.

12. Em $\mathcal{C}\big([0, 2\pi]\big)$ munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ considere o subespaço $S = [1, \operatorname{sen} x, \cos x]$. Calcule $\operatorname{proj}_S(x - 2)$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a expressão:
    $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos x - (ax + b)\big]^2\,dx$$
    assume o seu valor mínimo. Assinale a alternativa correta:

    a. $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$.
    b. $a = b = 0$.
    c. $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$.
    d. $a = 0$ e $b = \pi$.
    e. $a = \pi$ e $b = 0$.

14. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0,1]$ considerando em $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ o produto interno usual, ou seja, o produto interno dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

15. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

a. Prove que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^t A)$, onde X^t denota a transposta de uma matriz X e $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal).

b. Se $W = \big\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) : x + y - z = 0 \big\}$, determine uma base ortonormal para W.

c. Se W é como em (b), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

16. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $u, v \in V$ tais que $v \in S^\perp$ e $u - v \in S$. Pode-se afirmar que:

a. $\langle u, v\rangle = 0$.

b. $u \in S^\perp$.

c. $u = 0$.

d. $\langle u, v\rangle = \|v\|^2$.

e. $\langle u, v\rangle = \|u\|$.

17. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico e seja

$$S = \big\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0 \big\}.$$

(a) Determine uma base ortonormal de S.

(b) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.

18. Considere em $P_3(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Seja

$$S = \big\{ p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0 \big\}.$$

(a) Determine uma base ortonormal de S.

(b) Dado $p \in P_3(\mathbb{R})$ encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^\perp$ tais que $p = p_1 + p_2$.

19. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, S um subespaço de E, B um subconjunto de S e C um subconjunto de $S^\perp$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

a. se B é uma base de S e C é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ é uma base de E.

b. $B \cap C \subset \{0\}$.

c. se B e C são linearmente independentes então $B \cup C$ é linearmente independente.

d. se B é uma base de S e C é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ gera E, mas pode não ser linearmente independente.

e. se B gera S e C gera $S^\perp$ então $B \cup C$ gera E.

20. Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:

   (I) $(S+T)^{\perp} \subset S^{\perp} \cap T^{\perp}$;

   (II) Se E tem dimensão finita, então $\dim \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \dim S$;

   (III) $S^{\perp} + T^{\perp} \subset (S \cap T)^{\perp}$.

   Podemos afirmar que:

   a. As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita.

   b. As três afirmações são falsas.

   c. Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

   d. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

   e. As três afirmações são verdadeiras.

21. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear:

   a. $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(a)$, para toda f em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde a é um número real fixado.

   b. $T : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

   c. $T : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = af'' + bf' + cf$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$, onde a, b e c são números reais fixados.

   d. $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado.

22. Ache uma transformação linear $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = x^4$, $T(x + x^2) = 1$ e $T(x - x^2) = x + x^3$. Determine $T(a + bx + cx^2)$.

23. Seja V um espaço vetorial e $T\colon V \to V$ uma tranformação linear. Sejam $v, w \in V$. Ache $T(3v + w)$ e $T(w)$ em termos de v e w, sabendo que $T(v - w) = 2v - w$ e $T(2w - v) = v + w$.

24. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal, isto é, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$, então $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

   a. Mostre que a função $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear.

   b. Mostre que $\dim \ker(T) = n^2 - 1$.

   c. Mostre que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^t$, onde A^t denota a transposta da matriz A.

25. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $S \subset E$ um subespaço de E. Seja $T\colon E \to E$ a transformação definida por $T(u) = \operatorname{proj}_S u$, para todo $u \in E$. Considere as afirmações:

   (I) $\ker(T) = S^{\perp}$ e $\operatorname{im}(T) = S$;

   (II) Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de S e $u \in E$, então

   $$T(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} v_k;$$

   (III) $T(u) = u$ se, e somente se, $u \in S$.

   Podemos afirmar que:

   a. Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.

   b. Todas as afirmações são verdadeiras.

   c. Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.

   d. Apenas a afirmação (II) é falsa.

   e. Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

26. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = AM - MA$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que T é linear e determine seu núcleo. A matriz identidade pertence à imagem de T?

27. Ache uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{im}(T)$ seja gerada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ache uma base para $\mathrm{im}(T)$ e uma base para $\ker(T)$.

28. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(X) = AX$, $X \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ b & 0 & 2b & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

a. T não é injetora.

b. se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$ então T é injetora.

c. T é bijetora se e somente se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$.

d. T não é sobrejetora.

e. se $a \neq 1$, $b \neq 0$ e $a + c \neq 2$ então T não é bijetora.

29. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

a. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é linear.

b. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é linear.

c. $T : P_n(R) \to \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_n$ é linear.

d. Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}^5$.

e. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ e $\dim\ker(T) = 2$, então T é sobrejetora.

f. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\mathrm{im}(T) = \{0\}$, então $T(x) = 0$, para todo $x \in V$.

g. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.

h. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

30. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e cuja imagem seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

31. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e como imagem a reta $[(1, 0)]$.

32. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker(T) = \mathrm{im}(T)$.

33. Considere o operador linear $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por $T(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o núcleo e a imagem desse operador.

34. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

a. Existe uma transformação linear inversível $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

b. Se $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então T é sobrejetora.

c. Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$.

d. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$.

e. Existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \ker(T) \oplus \mathrm{im}(T)$.

35. Seja W um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dados um espaço vetorial V e uma transformação linear $T : V \to W$ defina

$$\langle\!\langle v_1, v_2 \rangle\!\rangle = \langle T(v_1), T(v_2)\rangle \text{ para todos } v_1, v_2 \in V.$$

Mostre que $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ é um produto interno em V se, e somente se, T é injetora.

36. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.

   a. Uma transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora se, e somente se, $\dim\ker(T) = \dim(U) - \dim(V)$.

   b. Dada uma transformação linear $T : U \to V$ e um vetor $v \in V$ então o conjunto $G = \{x \in U : T(x) = v\}$ é um subespaço de U.

   c. O núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

   d. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for injetora, então $\dim\operatorname{im}(T) = m$.

   e. Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetora, então $\dim\ker(T) = m - n$.

37. Use o Teorema da Dimensão para provar que um sistema linear homogêneo que tem mais incógnicas do que equações tem que ter uma solução não trivial.

38. Mostre que toda matriz A em $M_n(\mathbb{R})$ é da forma $A = B^t - 3B$ para uma única B em $M_n(\mathbb{R})$. (Sugestão: Considere a função $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(B) = B^t - 3B$).

39. Seja a um número real. Considere o subespaço $W = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(a) = 0\}$ de $P_n(\mathbb{R})$. Prove que $\{x-a,\ (x-a)^2,\ \dots\ ,(x-a)^n\}$ é uma base de W. (Sugestão: Considere a função avaliação $A_a\colon P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A_a(p(x)) = p(a)$.)

40. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Prove que $V = \ker(T) \oplus \operatorname{im}(T)$ se, e somente se, $\ker(T) \cap \operatorname{im}(T) = \{0\}$.

41. Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores de V, e considere o conjunto $\mathcal{C} = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ de vetores de W.

   a. Se $\mathcal{C}$ é l.i., mostre que $\mathcal{B}$ é l.i.

   b. Se $\ker T = 0$ e $\mathcal{B}$ é l.i., mostre que $\mathcal{C}$ é l.i.

   c. Se $W = [\mathcal{C}]$, mostre que $\operatorname{im} T = W$.

   d. Se $V = [\mathcal{B}]$, mostre que $\operatorname{im} T = [\mathcal{C}]$.

42. Sejam E um espaço vetorial de dimensão 2 e $T\colon E \to E$ um operador linear não nulo tal que $T \circ T = 0$. Considere as afirmações:

   (I) $\operatorname{im}(T) = \ker(T)$;

   (II) $\dim\operatorname{im}(T) = 2$;

   (III) $\dim\ker(T) = 1$.

   Podemos afirmar que:

   a. Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

   b. Apenas a afirmação (II) é falsa.

   c. Apenas a afirmação (III) é falsa.

   d. Todas as afirmações são falsas.

   e. Todas as afirmações são verdadeiras.

43. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que T e T^2 tenham o mesmo posto. (Recorde que o *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem.) Prove que $\ker(T) \cap \operatorname{im}(T) = \{0\}$. Vale a recíproca?

44. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Obtenha números reais a, b, c de modo que

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\big\}.$$

RESPOSTAS

1. $t > 0$.

2. $\{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$; $\|(1,0)\| = \sqrt{2}$.

7. **a.** não existe λ;
   b. $\lambda = \frac{2}{3}$.

11. $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105)$.

15. **b.** Uma possível base é
    $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
    c. $\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

14. $\frac{1}{5}(14x + 3)$.

12. $\pi - 2 - 2\operatorname{sen} x$.

17. **a.** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 2, 6, -1)$.
    b. Se $v = (x, y, z, w)$ então,
    $v_1 = \frac{1}{7}(6x + 2y - z - w,$
    $2x + 3y + 2z + 2w,$
    $-x + 2y + 6z - w,$
    $-x + 2y - z + 6w)$
    e $v_2 = \frac{1}{7}(x - 2y + z + w,$
    $-2x + 4y - 2z - 2w,$
    $x - 2y + z + w,$
    $x - 2y + z + w)$.

18. **a.** $\left\{\sqrt{3}\,(x - 1), \sqrt{5}\,(4x^2 - 5x + 1), \sqrt{7}\,(15x^3 - 25x^2 + 11x - 1)\right\}$.
    b. Se $f = a + bx + cx^2 + dx^3$ então, $p_1 = \frac{1}{4}\big((5a + b + c + d)-$
    $(15a + 11b + 15c + 15d)x+$
    $(45a + 45b + 49c + 45d)x^2-$
    $(35a + 35b + 35c + 31d)x^3\big)$ e
    $p_2 = \frac{1}{4}(a + b + c + d)(-1 + 15x - 45x^2 + 35x^3)$.

9. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right),\right.$
   $\left.\left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$.

10. **b.** Uma possível base é
    $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$.

21. Todas as transformações dadas são lineares.

22. $T(a + bx + cx^2) = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2}x + \frac{b-c}{2}x^3 + ax^4$.

23. $T(3v + w) = 18v$ e $T(w) = 3v$.

26. $\ker T = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ e $Id \notin \operatorname{im}(T)$.

27. (a) Defina, por exemplo,

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = \begin{pmatrix} a+2b & b+6c & a+4b+2c \\ 3b+c & a+5b & a-2b \\ 2a & -b & a-3b-c \end{pmatrix}.$$

(b) Para o exemplo dado em (0a), uma base de $\ker(T)$ é $\{x^3\}$. Uma base de $\mathrm{im}(T)$ é constituida pelas matrizes dadas no enunciado do exercício.

29.

(a) Falsa	(b) Falsa
(c) Verdadeira	(d) Verdadeira
(e) Verdadeira	(f) Verdadeira
(g) Falsa	(h) Verdadeira

30. Defina, por exemplo,
$T(x,y) = (x-y, 2x-2y)$.

31. Defina, por exemplo,
$T(x,y) = (y,0)$.

32. Defina, por exemplo,
$T(x,y,z,t) = (z,t,0,0)$. Assim,

$$\ker(T) = \mathrm{im}(T) = \big[(1,0,0,0),(0,1,0,0)\big].$$

33. $\ker(T) = \{0\}$;
$\mathrm{im}(T) = \big\{\varphi \in C^1(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\big\}$.

34.

(a) Verdadeira	(b) Falsa
(c) Verdadeira	(d) Verdadeira
(e) Verdadeira	(f) Verdadeira

36.

(a) Verdadeira	(b) Falsa
(c) Falsa	(d) Verdadeira
(e) Verdadeira	

44. Considere, por exemplo, $a=-1$, $b=-1$ e $c=1$.

Múltipla Escolha:

Ex. 3. (d);		
Ex. 5. (b);	Ex. 6. (e);	Ex. 13. (a)
Ex. 16. (d);	Ex. 19. (d);	Ex. 20. (e)
Ex. 25. (d);	Ex. 28. (b);	Ex. 42. (b)