Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de V e S o subespaço de V definido por:

$$S = [(1, a, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 1, a)_{\mathcal{B}}, (a, 1, 0)_{\mathcal{B}}],$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Se a dimensão de $S^{\perp}$ é igual a 1, pode-se afirmar que:

(a) $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$;
(b) $a = 0$;
(c) $a = 0$ ou $a = 2$ ou $a = -2$;
(d) $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = 2$;
(e) $a = 1$ ou $a = -1$.

Q2. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para todos $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Uma base de $S^{\perp}$ é:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$;
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$;
(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$;
(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Q3. Seja V um espaço vetorial. Recorde que uma aplicação:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

é um produto interno se e somente se valem as seguintes condições:

(I) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, para quaisquer $u,v\in V$;
(II) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$, para quaisquer $u,v,w\in V$;
(III) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$, para quaisquer $u,v\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
(IV) $\langle u,u\rangle \geq 0$ para todo $u\in V$, sendo $\langle u,u\rangle = 0$ se e somente se $u=0$.

Se $V=\mathbb{R}^2$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é definido por:

$$\big\langle(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)\big\rangle = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,\quad (\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)\in\mathbb{R}^2,$$

pode-se afirmar que:

(a) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno;
(b) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfaz apenas as condições (I), (II) e (III);
(c) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfaz apenas as condições (II) e (III);
(d) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfaz apenas as condições (I) e (III);
(e) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfaz apenas as condições (III) e (IV).

Q4. Seja $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se $T\circ T = T$, pode-se afirmar que:

(a) $\mathrm{Im}(T) = \big\{x\in\mathbb{R}^n : T(x)=x\big\}$;
(b) T é sobrejetora;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;
(d) n é par;
(e) T é injetora.

Q5. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ e $T:\mathbb{R}^4\to M_{3\times1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ a & 0 & b & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix},$$

para todo $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$. Pode-se afirmar que:

(a) T é sobrejetora para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$;
(b) T é sobrejetora se e somente se $a\neq b$ ou $a\neq 2$;
(c) T é injetora para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$;
(d) T é sobrejetora se e somente se $a\neq b$ e $a\neq 2$;
(e) T é injetora se e somente se $a=b=2$.

Q6. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} 2a + 5b - c & -a - 3b + c + d \\ a + 2c + 5d & 3a + 7b - c + d \end{pmatrix},$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pode-se afirmar que:

(a) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$ e $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 3$;
(b) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 0$ e $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 4$;
(c) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 3$ e $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$;
(d) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$ e $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$;
(e) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 3$ e $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 1$.

Q7. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = [(1, 1, 0, 2, -1), (2, 2, -1, 0, 1)],$$
$$S_2 = [(1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 2, 0)].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $S_1 = S_2$;
(b) $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(c) $\dim(S_1) = \dim(S_2)$;
(d) $\dim(S_1 + S_2) = 4$;
(e) $\mathbb{R}^5 = S_1 + S_2$.

Q8. Considere um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $x, y \in V$. Pode-se afirmar que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ se e somente se:

(a) $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$;
(b) x é ortogonal a y;
(c) $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
(d) $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
(e) $x = 0$ ou $y = 0$.

Q9. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = y - w = 0\},$$
$$S_2 = [(3, 4, -1, 0), (1, -1, -5, -7), (2, 3, 0, 1)].$$

As dimensões de S_1, S_2 e $S_1 \cap S_2$ são iguais, respectivamente, a:

(a) 1, 2 e 1;
(b) 2, 2 e 2;
(c) 1, 1 e 1;
(d) 2, 2 e 1;
(e) 2, 3 e 1.

Q10. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço não nulo de V de dimensão finita. Considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por $T(v) = -v + \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in V$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\operatorname{Ker}(T) = S^\perp$;
(b) $\operatorname{Im}(T) = S$;
(c) T é sobrejetora;
(d) T é injetora;
(e) $\operatorname{Ker}(T) = S$.

Q11. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $u, v, w \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\langle z, v \rangle = \langle z, w \rangle$ para todo $z \in S$ então $v - w \in S^\perp$;
(II) se a dimensão de V é finita e igual a n, $\mathcal{B}$ é uma base de V e $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_\mathcal{B}$ então $\|v\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$;
(III) se $w = u + v$, $v \in S^\perp$ e $\langle u, v \rangle = 0$ então $u \in S$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q12. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para todos $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Se $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ é o elemento de S mais próximo de $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, pode-se afirmar que:

(a) $-a + b + c - d = 4$;
(b) $-a + b - c + d = 4$;
(c) $-a - b + c + d = 8$;
(d) $-a - b - c + d = 4$;
(e) $-a - b + c + d = 4$.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$ e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ a base de $\mathbb{R}^3$ obtida a partir de $\{u_1, u_2, u_3\}$ através do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Se $u_3 = (0, 2, -1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$, pode-se afirmar que $\mathrm{proj}_{[v_1, v_2]}\, u_3$ é igual a:

(a) $(-1, 3, -1)$;
(b) $(1, -1, -1)$;
(c) $(1, -1, 1)$;
(d) $(1, 1, -1)$;
(e) $(-1, -1, 1)$.

Q14. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno definido por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$S = \big\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

A projeção ortogonal do vetor $(1, 2)$ sobre S é igual a:

(a) $\frac{3}{2}(1, 1)$;
(b) $\frac{5}{2}(1, 1)$;
(c) $3(1, 1)$;
(d) $\frac{1}{2}(1, 1)$;
(e) $2(1, 1)$.

Q15. Assinale a alternativa correta:

(a) existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$\mathrm{Ker}(T) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\}, \quad \mathrm{Im}(T) = \big\{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\big\};$

(b) existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathrm{Ker}(T) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\},$$
$$\mathrm{Im}(T) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\big\};$$

(c) existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \circ T = 0$ e tal que T é sobrejetora;

(d) existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

(e) existe uma transformação linear sobrejetora $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

Q16. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ e $v_3 = (-2, 1, 1)$. Se $u \in \mathbb{R}^3$ satisfaz $\langle u, v_1 \rangle = 2$, $\langle u, v_2 \rangle = 0$ e $\langle u, v_3 \rangle = -2$ então a norma de u é igual a:

(a) $\sqrt{3}$;

(b) $\sqrt{2}$;

(c) $2\sqrt{3}$;

(d) $2\sqrt{2}$;

(e) $\sqrt{5}$.