Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \ldots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S será denotada por $\operatorname{proj}_S u$.

Q1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, seja S um subespaço de V e seja $x \in V$. Sabendo que $x = 8u - 7v$, com $v \in S$ e $u \in S^\perp$, podemos afirmar que o vetor de S mais próximo de x é

(a) u.
(b) $-7v$.
(c) $7v$.
(d) $\operatorname{proj}_{[u]} x$.
(e) v.

Q2. Dado um número $a \in \mathbb{R}$, considere o subespaço $S = [(1, a, 0), (0, 1, a), (a, 1, 0)]$ de $\mathbb{R}^3$. Se $\mathbb{R}^3$ está munido do produto interno usual, dizemos que a é admissível para S se, e somente se, $\dim(S^\perp) = 1$. Então, podemos afirmar que a soma de todos os números admissíveis para S é igual a

(a) 0.
(b) 2.
(c) -2.
(d) 1.
(e) -1.

Q3. Considere o subespaço $S = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ de $\mathbb{R}^4$ e seja $u \in \mathbb{R}^4$. Sabendo que, com respeito ao produto interno usual, $\operatorname{proj}_S u = (1, 0, 0, 1)$, podemos afirmar que

(a) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (a, 1, -1, a)$.
(b) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (1, a, a, -1)$.
(c) $u = (1, 0, 0, 1)$.
(d) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (1, a, -a, 1)$.
(e) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (a, 1, 1, -a)$.

Q4. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear não nulo que satisfaz $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \mathrm{Ker}(T)$.

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
(II) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$.
(III) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
(b) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
(c) Apenas a afirmação (III) é falsa.
(d) Todas as três afirmações são falsas.
(e) Apenas a afirmação (I) é falsa.

Q5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Assinale a afirmação verdadeira.

(a) Se $u, v \in V$ são tais que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, então $\|u\| = \|v\|$.
(b) Se $u, v \in V$ são tais que $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$.
(c) Para todos $u, v \in V$, $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$.
(d) Se S é um subespaço de V com base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e $v \in V$, então $\mathrm{proj}_S\, v = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{proj}_{[u_j]}\, v$.
(e) Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e $u \in V$ é um vetor que satisfaz $\langle u, e_j\rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então $u = 0_V$.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores de V. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) T é sobrejetora se, e somente se, T é injetora.
(b) Se T é sobrejetora, então $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 0$.
(c) Se $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V, então $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 0$.
(d) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V, então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V.
(e) Se $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 0$, então T é sobrejetora.

Q7. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o subespaço $W = [(1, -2, 1)]$ de $\mathbb{R}^3$. Então podemos afirmar que o núcleo de T é

(a) $[(2, 1, 0), (1, 1, 2)]$.
(b) $\{(0, 0, 0)\}$.
(c) $[(3, 2, 1), (1, 2, 3)]$.
(d) $[(1, -2, 1)]$.
(e) $[(1, 1, 1), (2, 2, 2)]$.

Q8. Em $P_3(\mathbb{R})$, com o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, seja $f(t) = a + bt$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo de $g(t) = t^3$. Então, $a + b$ é igual a

(a) $\dfrac{7}{10}$.
(b) 1.
(c) $\dfrac{4}{5}$.
(d) $\dfrac{11}{10}$.
(e) $\dfrac{1}{2}$.

Q9. Considere o subespaço $W = [(1,0,1),(2,0,-1)]$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(u) = \operatorname{proj}_W u$, com respeito ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correta.

(a) T é injetora, mas não invertível.
(b) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$.
(c) T é invertível.
(d) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 0$.
(e) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$.

Q10. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear que satisfaz

$$T(t-t^2) = t+t^2, \quad T(1+t) = 1+t^2 \quad \text{e} \quad T(t+t^2) = 1+t+2t^2.$$

Então, podemos afirmar que

(a) $\{1+t-2t^2\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.
(b) $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.
(c) $\{1+t+2t^2\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.
(d) $\{1+t, t+t^2\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.
(e) $\{t-t^2, t+t^2\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.

Q11. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1-2t+2t^2, \qquad T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 3t,$$
$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1+2t-2t^2, \qquad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1+t+2t^2.$$

Assinale a afirmação verdadeira.

(a) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$.
(b) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 3$.
(c) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$.
(d) T é injetora.
(e) $\dim(\operatorname{Im}(T)) < \dim(\operatorname{Ker}(T))$.

Q12. Considere as bases $B = \{1, t, t^2\}$ e $C = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear satisfazendo as seguintes condições:

(i) as coordenadas de $T(1)$ na base C são $(0,0,0)$,
(ii) as coordenadas de $T(t)$ na base C são $(1,0,0)$ e
(iii) as coordenadas de $T(t^2)$ na base C são $(0,1,0)$.

Assinale a afirmação **FALSA**.

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.
(b) $T(t - t^2) = (0,0,1)$.
(c) T não é invertível.
(d) $\{T(1), T(t), T(t^2)\}$ é linearmente dependente.
(e) $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0),(0,1,0)]$.

Q13. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, seja S um subespaço de V e sejam $u, v \in V$ vetores que satisfazem $u + v \in S$ e $u - v \in S^{\perp}$. Podemos, então, afirmar que

(a) $\langle u, v\rangle = \|v\|$.
(b) $\langle u, v\rangle = \|u\|$.
(c) $\|u\| = \|v\|$.
(d) $\{u, v\}$ é linearmente dependente.
(e) $\langle u, v\rangle = 0$.

Q14. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = 1+2t^3$, $T(0,1,0) = t - t^2$ e $T(0,0,1) = 1 - t + t^2 + 2t^3$. Então, podemos afirmar que

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [(2,-2,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2t^3, t + t^2]$.
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [(3,-3,-3)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [2 + 4t^3, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [(3,3,-3)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.
(d) $\mathrm{Ker}(T) = [(1,-1,1)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2t^3, t - t^2]$.
(e) $\mathrm{Ker}(T) = [(2,2,2)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [2 + 4t^3, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.

Q15. Seja V um espaço vetorial com produto interno e sejam S e W subespaços de V. Assinale a afirmação **FALSA**.

(a) Se $u \in S$, $v \in S^{\perp}$ e $u + v = 0_V$, então $u = v = 0_V$.

(b) Se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

(c) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortogonal de V, então $v = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{proj}_{[u_j]} v$, para todo $v \in V$.

(d) Se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

(e) Se $A = \{u_1, \dots, u_p\} \subset S$, $B = \{v_1, \dots, v_q\} \subset S^{\perp}$ e A e B são linearmente independentes, então $A \cup B$ é linearmente independente.

Q16. Assinale a afirmação verdadeira.

(a) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

(b) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, T é um operador linear de V e $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0_V\}$, então $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

(c) A função $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p) = p'$, onde p' denota a derivada de p, é uma transformação linear sobrejetora.

(d) Existe uma transformação linear invertível $T\colon M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$.

(e) Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita com $\dim(U) \leq \dim(V)$ e $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, então T é injetora.