Q1. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4),(5,0,-1,-1)].$$

Uma base para S é:

(a) $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(5,0,-1,-1)\}$;
(b) $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(-1,-3,2,4)\}$;
(c) $\{(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4),(5,0,-1,-1)\}$;
(d) $\{(1,-2,1,3),(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(-1,-3,2,4)\}$;
(e) $\{(2,1,-1,-2),(0,-5,3,8),(5,0,-1,-1)\}$.

Q2. No conjunto $V = \mathbb{R}^2$, considere as operações $\oplus$ e $\odot$ definidas por:

$$(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2) = (a_1+a_2-1, b_1+b_2-1), \quad \alpha \odot (a,b) = (\alpha a, 0),$$

para todos $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *três* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
(b) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, é um espaço vetorial;
(c) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *uma* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
(d) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *quatro* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
(e) o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *duas* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial.

Q3. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de S_1 e de S_2, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 \cap S_2$;
(II) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$;
(III) toda base de V contém alguma base de S_1.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q4. Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 5 e sejam $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ subconjuntos de V. Suponha que $A \cup B$ gere V. Assinale a alternativa correta:

(a) a interseção $A \cap B$ pode não ser vazia;
(b) o conjunto $A \cup B$ pode ser linearmente dependente;
(c) o conjunto A é linearmente independente;
(d) o subespaço $[v_1, v_2, v_3] \cap [w_1, w_2]$ tem dimensão maior ou igual a 1;
(e) w_1 pertence ao subespaço gerado por A.

Q5. Considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer $A \in M_n(\mathbb{R})$, vale que $\big\{X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA\big\}$ é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$;

(II) se $A = \{u_1, \ldots, u_q\}$ é um subconjunto linearmente dependente de um espaço vetorial, então todo elemento de A é combinação linear dos outros elementos de A;

(III) dados um espaço vetorial V, vetores distintos $u_1, u_2, u_3 \in V$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente, então o conjunto $\{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$ também é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) todas as afirmações são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q6. Seja $c \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto A de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$A = \big\{(1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, 1, c, 1)\big\}.$$

Temos que o conjunto A está contido numa base de $\mathbb{R}^4$ se, e somente se:

(a) $c \neq -4$;
(b) $c \neq 0$;
(c) $c \neq -1$;
(d) $c \neq 1$;
(e) $c \neq -3$.

Q7. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os polinômios:

$$p_1(t) = 1 - 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = -2 + t + t^2, \quad p_3(t) = -5 + 4t - t^2$$

e $q(t) = a - t + (13 + a)t^2$. Pode-se afirmar que:

(a) $q \in [p_1, p_2, p_3]$;
(b) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = \frac{7}{3}$;
(c) $q \notin [p_1, p_2, p_3]$;
(d) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = \frac{4}{3}$;
(e) $q \in [p_1, p_2, p_3]$ se, e somente se, $a = -4$.

Q8. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V. Pode-se afirmar que:

(a) $S_1 \cup S_2$ é um subespaço de $S_1 + S_2$;
(b) S_1 e S_2 são subespaços de $S_1 + S_2$;
(c) $S_1 \cup S_2$ é um subespaço de V;
(d) $S_1 + S_2$ é um subespaço de $S_1 \cap S_2$;
(e) $S_1 \cap S_2$ não é um subespaço de S_1.

Q9. Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 e seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V. Considere o conjunto $A = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$. Pode-se afirmar que:

(a) o subespaço gerado por A tem dimensão 2;
(b) A não gera V;
(c) A é linearmente dependente;
(d) A é uma base de V;
(e) $\dim\big([v_1, v_1 + v_2] \cap [v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3]\big) = 2$.

Q10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto A de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$A = \{1 + ax, b + x + x^2, 2 + 2x + 2ax^2\}.$$

Temos que A é linearmente independente se, e somente se:

(a) $a + b \neq a^2$;
(b) $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(c) $ab + 1 \neq 2a$;
(d) $a^2b + 1 \neq 2a$;
(e) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Q11. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M_2(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b + 2c + 3d = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(b) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(c) $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(d) $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(e) $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$.

Q12. Considere as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, definidas por:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,$$
$$f_4(x) = \operatorname{sen}(2x), \quad f_5(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad f_6(x) = \cos(2x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja V o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A dimensão do subespaço $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$ de V é igual a:

(a) 3;
(b) 2;
(c) 4;
(d) 6;
(e) 5.

Q13. Considere o subespaço S de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + 2b + 2c + 2d = 0 \text{ e } a + 2b + c + 2d = 0 \right\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base de $M_2(\mathbb{R})$ em que os primeiros vetores formam uma base de S:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Q14. A soma das coordenadas do vetor $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ relativamente à base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ é igual a:

(a) 0;
(b) -1;
(c) -2;
(d) 1;
(e) 2.

Q15. Seja V um espaço vetorial e considere as seguintes afirmações:

(I) se A é um conjunto de geradores de V e se $u \in V$ não pertence a A, então o conjunto $A \cup \{u\}$ é linearmente dependente;

(II) se V tem dimensão finita e igual a n, então todo subconjunto de V com n elementos é linearmente independente;

(III) se $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_q\}$ são subconjuntos linearmente independentes de V tais que $[u_1, \ldots, u_p] \cap [v_1, \ldots, v_q] = \{0\}$, então o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q16. Sejam V um espaço vetorial e S um subespaço de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V tem dimensão finita, então toda base de S está contida numa base de V;

(II) dados $u_1, \ldots, u_k \in V$, se todo elemento de S é combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_k$, então S é o subespaço gerado por $\{u_1, \ldots, u_k\}$;

(III) se q é o número de elementos de um conjunto de geradores de V e p é o número de elementos de um subconjunto linearmente independente de V, então $p \leq q$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.