

**Q1.** Considere as funções  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , definidas por:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= \cos x, & f_3(x) &= \operatorname{sen} x - \cos x, \\ f_4(x) &= \operatorname{sen}(2x), & f_5(x) &= 2 \operatorname{sen} x, & f_6(x) &= \cos(2x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A dimensão do subespaço  $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$  de  $V$  é igual a:

- (a) 5;
- (b) 4;
- (c) 6;
- (d) 3;
- (e) 2.

**Q2.** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere os polinômios:

$$p_1(t) = 1 - 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = -2 + t + t^2, \quad p_3(t) = -5 + 4t - t^2$$

e  $q(t) = a - t + (13 + a)t^2$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $q \in [p_1, p_2, p_3]$  se, e somente se,  $a = \frac{7}{3}$ ;
- (b)  $q \in [p_1, p_2, p_3]$  se, e somente se,  $a = -4$ ;
- (c)  $q \in [p_1, p_2, p_3]$  se, e somente se,  $a = \frac{4}{3}$ ;
- (d)  $q \notin [p_1, p_2, p_3]$ ;
- (e)  $q \in [p_1, p_2, p_3]$ .

**Q3.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , vale que  $\{X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA\}$  é um subespaço de  $M_n(\mathbb{R})$ ;
- (II) se  $A = \{u_1, \dots, u_q\}$  é um subconjunto linearmente dependente de um espaço vetorial, então todo elemento de  $A$  é combinação linear dos outros elementos de  $A$ ;
- (III) dados um espaço vetorial  $V$ , vetores distintos  $u_1, u_2, u_3 \in V$  e um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se o conjunto  $\{u_1, u_2, u_3\}$  é linearmente independente, então o conjunto  $\{u_1, u_2 + \alpha u_1, u_3\}$  também é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q4.** A soma das coordenadas do vetor  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  relativamente à base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

do espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  é igual a:

- (a)  $-2$ ;
- (b)  $1$ ;
- (c)  $2$ ;
- (d)  $0$ ;
- (e)  $-1$ .

**Q5.** Considere o subespaço  $S$  de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = [(1, -2, 1, 3), (2, 1, -1, -2), (0, -5, 3, 8), (-1, -3, 2, 4), (5, 0, -1, -1)].$$

Uma base para  $S$  é:

- (a)  $\{(1, -2, 1, 3), (2, 1, -1, -2), (-1, -3, 2, 4)\}$ ;
- (b)  $\{(2, 1, -1, -2), (0, -5, 3, 8), (-1, -3, 2, 4), (5, 0, -1, -1)\}$ ;
- (c)  $\{(1, -2, 1, 3), (2, 1, -1, -2), (0, -5, 3, 8), (-1, -3, 2, 4)\}$ ;
- (d)  $\{(1, -2, 1, 3), (2, 1, -1, -2), (5, 0, -1, -1)\}$ ;
- (e)  $\{(2, 1, -1, -2), (0, -5, 3, 8), (5, 0, -1, -1)\}$ .

**Q6.** Considere os subespaços  $S_1$  e  $S_2$  de  $M_2(\mathbb{R})$  definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b + 2c + 3d = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$  e  $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ ;
- (b)  $\dim(S_1 + S_2) = 2$  e  $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$ ;
- (c)  $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$  e  $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$ ;
- (d)  $\dim(S_1 + S_2) = 3$  e  $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ ;
- (e)  $\dim(S_1 + S_2) = 3$  e  $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$ .

**Q7.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subespaços de um espaço vetorial  $V$ . Sejam  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  bases de  $S_1$  e de  $S_2$ , respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$  é uma base de  $S_1 \cap S_2$ ;
- (II)  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  é uma base de  $S_1 + S_2$ ;
- (III) toda base de  $V$  contém alguma base de  $S_1$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q8.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere o subconjunto  $A$  de  $P_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$A = \{1 + ax, b + x + x^2, 2 + 2x + 2ax^2\}.$$

Temos que  $A$  é linearmente independente se, e somente se:

- (a)  $ab + 1 \neq 2a$ ;
- (b)  $a^2b + 1 \neq 2a$ ;
- (c)  $a + b \neq a^2$ ;
- (d)  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ;
- (e)  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ .

**Q9.** Seja  $c \in \mathbb{R}$  e considere o subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$A = \{(1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, 1, c, 1)\}.$$

Temos que o conjunto  $A$  está contido numa base de  $\mathbb{R}^4$  se, e somente se:

- (a)  $c \neq 1$ ;
- (b)  $c \neq -4$ ;
- (c)  $c \neq -1$ ;
- (d)  $c \neq -3$ ;
- (e)  $c \neq 0$ .

**Q10.** Seja  $V$  um espaço vetorial e considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $A$  é um conjunto de geradores de  $V$  e se  $u \in V$  não pertence a  $A$ , então o conjunto  $A \cup \{u\}$  é linearmente dependente;
- (II) se  $V$  tem dimensão finita e igual a  $n$ , então todo subconjunto de  $V$  com  $n$  elementos é linearmente independente;
- (III) se  $A = \{u_1, \dots, u_p\}$  e  $B = \{v_1, \dots, v_q\}$  são subconjuntos linearmente independentes de  $V$  tais que  $[u_1, \dots, u_p] \cap [v_1, \dots, v_q] = \{0\}$ , então o conjunto  $A \cup B$  é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q11.** No conjunto  $V = \mathbb{R}^2$ , considere as operações  $\oplus$  e  $\odot$  definidas por:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1), \quad \alpha \odot (a, b) = (\alpha a, 0),$$

para todos  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a, b) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) o conjunto  $V$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *uma* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
- (b) o conjunto  $V$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *três* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
- (c) o conjunto  $V$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *quatro* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
- (d) o conjunto  $V$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , não é um espaço vetorial pois não satisfaz precisamente *duas* das oito propriedades que aparecem na definição usual de espaço vetorial;
- (e) o conjunto  $V$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , é um espaço vetorial.

**Q12.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subespaços de um espaço vetorial  $V$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $S_1 + S_2$  é um subespaço de  $S_1 \cap S_2$ ;
- (b)  $S_1 \cup S_2$  é um subespaço de  $V$ ;
- (c)  $S_1 \cap S_2$  não é um subespaço de  $S_1$ ;
- (d)  $S_1$  e  $S_2$  são subespaços de  $S_1 + S_2$ ;
- (e)  $S_1 \cup S_2$  é um subespaço de  $S_1 + S_2$ .

**Q13.** Considere o subespaço  $S$  de  $M_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + 2b + 2c + 2d = 0 \text{ e } a + 2b + c + 2d = 0 \right\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base de  $M_2(\mathbb{R})$  em que os primeiros vetores formam uma base de  $S$ :

- (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;
- (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ;
- (c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;
- (d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;
- (e)  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Q14.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 5 e sejam  $A = \{v_1, v_2, v_3\}$  e  $B = \{w_1, w_2\}$  subconjuntos de  $V$ . Suponha que  $A \cup B$  gere  $V$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) o subespaço  $[v_1, v_2, v_3] \cap [w_1, w_2]$  tem dimensão maior ou igual a 1;
- (b) o conjunto  $A \cup B$  pode ser linearmente dependente;
- (c) a interseção  $A \cap B$  pode não ser vazia;
- (d) o conjunto  $A$  é linearmente independente;
- (e)  $w_1$  pertence ao subespaço gerado por  $A$ .

**Q15.** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $S$  um subespaço de  $V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  tem dimensão finita, então toda base de  $S$  está contida numa base de  $V$ ;
- (II) dados  $u_1, \dots, u_k \in V$ , se todo elemento de  $S$  é combinação linear dos vetores  $u_1, \dots, u_k$ , então  $S$  é o subespaço gerado por  $\{u_1, \dots, u_k\}$ ;
- (III) se  $q$  é o número de elementos de um conjunto de geradores de  $V$  e  $p$  é o número de elementos de um subconjunto linearmente independente de  $V$ , então  $p \leq q$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q16.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3 e seja  $\{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de  $V$ . Considere o conjunto  $A = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $A$  é uma base de  $V$ ;
- (b)  $A$  é linearmente dependente;
- (c) o subespaço gerado por  $A$  tem dimensão 2;
- (d)  $\dim([v_1, v_1 + v_2] \cap [v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3]) = 2$ ;
- (e)  $A$  não gera  $V$ .