Q1. Seja U um espaço vetorial com $\dim(U) = 200$. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : U \to U$ tal que:
$$20 \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + 30 \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3500;$$

(II) se $T : U \to U$ é uma transformação linear tal que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 150$, então a imagem de T não está contida em $\mathrm{Ker}(T)$;

(III) se $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 185$, então a imagem de T está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $v, w \in V$. Temos que $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se:

(a) os vetores v e w são linearmente dependentes;
(b) $v = 0$ ou $w = 0$;
(c) existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu < 0$ e $w = \mu v$;
(d) os vetores v e w são linearmente independentes;
(e) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$ e $v = \lambda w$.

Q3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V. Sejam $x, y \in V$ tais que $\|x\| = \|y\|$. Pode-se afirmar que:

(a) $x - y$ é ortogonal a $x + y$;
(b) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
(c) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$ e $y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$;
(d) se $n \geq 2$, então $\mathrm{proj}_{[u_1, u_2]}(x + y) = \langle x + y, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} + \langle x + y, u_2 \rangle \frac{u_2}{\|u_2\|^2}$;
(e) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Q4. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $v, w \in V$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = 1$ e $\langle v, w \rangle = -2$, então $\|v - 5w\| = 7$;

(II) se U é um subespaço de V de dimensão finita e igual a n e se $e_1, \dots, e_n \in U$ são não nulos e ortogonais dois a dois, então:

$$u = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \cdots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

para todo $u \in U$;

(III) se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um subconjunto ortonormal de V com n elementos, então $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\| = \sqrt{n}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q5. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W um subespaço de V com dimensão finita e igual a m. Sejam $x \in V$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ uma base de W. Considere o seguinte sistema linear com m equações e incógnitas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{cases} \langle w_1, w_1 \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_1 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_1 \rangle \alpha_m = \langle x, w_1 \rangle, \\ \langle w_1, w_2 \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_2 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_2 \rangle \alpha_m = \langle x, w_2 \rangle, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle w_1, w_m \rangle \alpha_1 + \langle w_2, w_m \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle w_m, w_m \rangle \alpha_m = \langle x, w_m \rangle. \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta:

(a) esse sistema pode ter infinitas soluções;

(b) esse sistema tem solução se, e somente se, a base $\mathcal{B}$ for ortonormal;

(c) esse sistema necessariamente tem solução;

(d) esse sistema tem solução se, e somente se, a base $\mathcal{B}$ for ortogonal;

(e) esse sistema não pode ter solução.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que:

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos $v, w \in V$. Assinale a alternativa correta:

(a) é possível que T não seja nem injetora nem sobrejetora;
(b) T é necessariamente bijetora;
(c) T é necessariamente igual à aplicação identidade;
(d) T é necessariamente injetora, mas pode não ser sobrejetora;
(e) é possível que T seja sobrejetora e não injetora.

Q7. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e U um subespaço de V de dimensão finita e igual a n. Sejam $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) existem e são únicos $x \in U$ e $y \in U^{\perp}$ tais que $v = x + y$;
(II) o elemento de U mais próximo de v é:

$$\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2}\, u_n;$$

(III) se W é um subespaço de V tal que $V = U \oplus W$, então $W = U^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1) = (1, 2, 1), \quad T(1 + x) = (1, a, b), \quad T(1 + x + x^2) = (1, 1, 2).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é necessariamente injetora;
(b) T *não* é injetora se, e somente se, $a + b \neq 3$;
(c) T *não* é injetora se, e somente se, $a + b = 3$;
(d) T *não* é injetora se, e somente se, $a + b \neq 5$;
(e) T *não* é injetora se, e somente se, $a + b = 5$.

Q9. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X. Seja W o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$W = \big\{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^{\mathrm{t}} = -X\big\}.$$

A dimensão de $W^\perp$ é igual a:

(a) 4;
(b) 1;
(c) 3;
(d) 2;
(e) 0.

Q10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno canônico. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$U = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + y = 0 \text{ e } -2x + z + 3t = 0\big\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3), (1, 1, 3, 2)]$;
(b) $U^\perp = [(1, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 3)]$;
(c) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3), (-1, 1, 0, 0)]$;
(d) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3)]$;
(e) $U^\perp = [(-1, 1, 0, 0)]$.

Q11. Considere o espaço vetorial $C\big([0, 2]\big)$ munido do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f, g \in C\big([0, 2]\big),$$

e seja U o subespaço de $C\big([0, 2]\big)$ dado por $U = [1, t]$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 7) + 3t$;
(b) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 5t$;
(c) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 3t$;
(d) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 7t$;
(e) $\mathrm{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 15) + 7t$.

Q12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V tal que vale a seguinte condição: para todo $v \in V$, se $\langle v, v_i \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, então $v = 0$. Assinale a alternativa correta:

(a) E é necessariamente uma base de V;
(b) E pode ser linearmente dependente;
(c) E é necessariamente uma base ortogonal de V;
(d) E necessariamente gera V, mas pode não ser linearmente independente;
(e) E não pode ser uma base de V.

Q13. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}),$$

e seja U o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ dado por $U = [x - 1, x - 2]$. Aplicando o método de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\{x - 1, x - 2\}$ de U, obtemos a base ortogonal:

(a) $\{x - 1, x + 2\}$;
(b) $\left\{x - 1, -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right\}$;
(c) $\left\{x - 1, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right\}$;
(d) $\{x - 1, -x - 2\}$;
(e) $\left\{x - 1, -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right\}$.

Q14. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$;
(b) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Ker}(T) = W$, $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$ e $T(1, 1, 0) = (2, 2, -2)$;
(c) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$;
(d) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$;
(e) existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$.

Q15. Considere o espaço vetorial $C\big([-\pi,\pi]\big)$ munido do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f,g \in C\big([-\pi,\pi]\big).$$

Seja W o subespaço de $C\big([-\pi,\pi]\big)$ dado por $W = [1, \operatorname{sen} t, \cos t]$ e recorde que o conjunto $\{1, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ é ortogonal. O vetor de W mais próximo de $f(t) = t$ é:

(a) $2\operatorname{sen} t$;

(b) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos t$;

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$;

(d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$;

(e) $2\cos t$.

Q16. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = \int_{0}^{33333} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \quad p,q \in P_5(\mathbb{R}),$$

e o subespaço U de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $U = [1+x, x^2]$. Sejam $T : P_5(\mathbb{R}) \to U$ e $S : P_5(\mathbb{R}) \to U^\perp$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = \operatorname{proj}_U p, \quad S(p) = \operatorname{proj}_{U^\perp} p,$$

para todo $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) existe uma transformação linear sobrejetora $L : U^\perp \to \mathbb{R}^5$;

(b) existe uma transformação linear injetora $L : U^\perp \to \mathbb{R}^5$;

(c) T é sobrejetora;

(d) se $L : P_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ é uma transformação linear, então a dimensão de $\operatorname{Ker}(L)$ é maior ou igual a 1;

(e) S é sobrejetora.