

**Q1.** Considere o espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde  $\text{tr}(X)$  denota o traço de uma matriz quadrada  $X$ . Seja  $W$  o subespaço de  $M_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^t = -X\}.$$

A dimensão de  $W^\perp$  é igual a:

- (a) 3;
- (b) 4;
- (c) 0;
- (d) 2;
- (e) 1.

**Q2.** Seja  $U$  um espaço vetorial com  $\dim(U) = 200$ . Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear  $T : U \rightarrow U$  tal que:

$$20 \dim(\text{Ker}(T)) + 30 \dim(\text{Im}(T)) = 3500;$$

(II) se  $T : U \rightarrow U$  é uma transformação linear tal que  $\dim(\text{Im}(T)) = 150$ , então a imagem de  $T$  não está contida em  $\text{Ker}(T)$ ;

(III) se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 185$ , então a imagem de  $T$  está contida em  $\text{Ker}(T)$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q3.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e igual a  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja  $E = \{v_1, \dots, v_n\}$  um subconjunto de  $V$  tal que vale a seguinte condição: para todo  $v \in V$ , se  $\langle v, v_i \rangle = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , então  $v = 0$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $E$  é necessariamente uma base de  $V$ ;
- (b)  $E$  não pode ser uma base de  $V$ ;
- (c)  $E$  é necessariamente uma base ortogonal de  $V$ ;
- (d)  $E$  necessariamente gera  $V$ , mas pode não ser linearmente independente;
- (e)  $E$  pode ser linearmente dependente.

**Q4.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e igual a  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$ . Sejam  $x, y \in V$  tais que  $\|x\| = \|y\|$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ;
- (b)  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$  e  $y = \sum_{i=1}^n \langle y, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$ ;
- (c)  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ ;
- (d)  $x - y$  é ortogonal a  $x + y$ ;
- (e) se  $n \geq 2$ , então  $\text{proj}_{[u_1, u_2]}(x + y) = \langle x + y, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} + \langle x + y, u_2 \rangle \frac{u_2}{\|u_2\|^2}$ .

**Q5.** Sejam  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $U$  um subespaço de  $V$  de dimensão finita e igual a  $n$ . Sejam  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $U$  e  $v \in V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) existem e são únicos  $x \in U$  e  $y \in U^\perp$  tais que  $v = x + y$ ;
- (II) o elemento de  $U$  mais próximo de  $v$  é:

$$\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n;$$

- (III) se  $W$  é um subespaço de  $V$  tal que  $V = U \oplus W$ , então  $W = U^\perp$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q6.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear tal que:

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos  $v, w \in V$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  é necessariamente igual à aplicação identidade;
- (b)  $T$  é necessariamente bijetora;
- (c) é possível que  $T$  seja sobrejetora e não injetora;
- (d)  $T$  é necessariamente injetora, mas pode não ser sobrejetora;
- (e) é possível que  $T$  não seja nem injetora nem sobrejetora.

**Q7.** Seja  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) existem infinitas aplicações lineares  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $\text{Ker}(T) = W$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$ ;
- (b) existe uma única aplicação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Ker}(T) = W$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$ ;
- (c) existem infinitas aplicações lineares  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $\text{Ker}(T) = W$ ,  $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$  e  $T(1, 1, 0) = (2, 2, -2)$ ;
- (d) existe uma única aplicação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Ker}(T) = W$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$ ;
- (e) existem infinitas aplicações lineares  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $\text{Ker}(T) = W$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$ .

**Q8.** Considere o espaço vetorial  $C([-\pi, \pi])$  munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([-\pi, \pi]).$$

Seja  $W$  o subespaço de  $C([-\pi, \pi])$  dado por  $W = [1, \text{sen } t, \text{cos } t]$  e recorde que o conjunto  $\{1, \text{sen } t, \text{cos } t\}$  é ortogonal. O vetor de  $W$  mais próximo de  $f(t) = t$  é:

- (a)  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{cos } t$ ;
- (b)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{cos } t$ ;
- (c)  $2 \text{sen } t$ ;
- (d)  $2 \text{cos } t$ ;
- (e)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{cos } t$ .

**Q9.** Considere o espaço vetorial  $P_3(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}),$$

e seja  $U$  o subespaço de  $P_3(\mathbb{R})$  dado por  $U = [x - 1, x - 2]$ . Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base  $\{x - 1, x - 2\}$  de  $U$ , obtemos a base ortogonal:

- (a)  $\{x - 1, x + 2\}$ ;
- (b)  $\{x - 1, -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\}$ ;
- (c)  $\{x - 1, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$ ;
- (d)  $\{x - 1, -x - 2\}$ ;
- (e)  $\{x - 1, -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\}$ .

**Q10.** Considere o espaço vetorial  $P_5(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{33333} p(x)q(x) dx, \quad p, q \in P_5(\mathbb{R}),$$

e o subespaço  $U$  de  $P_5(\mathbb{R})$  dado por  $U = [1 + x, x^2]$ . Sejam  $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow U$  e  $S : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow U^\perp$  as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = \text{proj}_U p, \quad S(p) = \text{proj}_{U^\perp} p,$$

para todo  $p \in P_5(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se  $L : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  é uma transformação linear, então a dimensão de  $\text{Ker}(L)$  é maior ou igual a 1;
- (b)  $S$  é sobrejetora;
- (c) existe uma transformação linear sobrejetora  $L : U^\perp \rightarrow \mathbb{R}^5$ ;
- (d) existe uma transformação linear injetora  $L : U^\perp \rightarrow \mathbb{R}^5$ ;
- (e)  $T$  é sobrejetora.

**Q11.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que:

$$T(1) = (1, 2, 1), \quad T(1 + x) = (1, a, b), \quad T(1 + x + x^2) = (1, 1, 2).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  não é injetora se, e somente se,  $a + b = 5$ ;
- (b)  $T$  não é injetora se, e somente se,  $a + b \neq 5$ ;
- (c)  $T$  não é injetora se, e somente se,  $a + b \neq 3$ ;
- (d)  $T$  não é injetora se, e somente se,  $a + b = 3$ ;
- (e)  $T$  é necessariamente injetora.

**Q12.** Considere o espaço vetorial  $C([0, 2])$  munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 2]),$$

e seja  $U$  o subespaço de  $C([0, 2])$  dado por  $U = [1, t]$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 3t$ ;
- (b)  $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 7t$ ;
- (c)  $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 15) + 7t$ ;
- (d)  $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 7) + 3t$ ;
- (e)  $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 5t$ .



**Q16.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $v, w \in V$ ,  $\|v\| = 2$ ,  $\|w\| = 1$  e  $\langle v, w \rangle = -2$ , então  $\|v - 5w\| = 7$ ;  
(II) se  $U$  é um subespaço de  $V$  de dimensão finita e igual a  $n$  e se  $e_1, \dots, e_n \in U$  são não nulos e ortogonais dois a dois, então:

$$u = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

para todo  $u \in U$ ;

- (III) se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é um subconjunto ortonormal de  $V$  com  $n$  elementos, então  $\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\| = \sqrt{n}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;  
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;  
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;  
(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;  
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.