

Q1. Seja U um espaço vetorial com $\dim(U) = 200$. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : U \rightarrow U$ tal que:

$$20 \dim(\text{Ker}(T)) + 30 \dim(\text{Im}(T)) = 3500;$$

(II) se $T : U \rightarrow U$ é uma transformação linear tal que $\dim(\text{Im}(T)) = 150$, então a imagem de T não está contida em $\text{Ker}(T)$;

(III) se $\dim(\text{Ker}(T)) = 185$, então a imagem de T está contida em $\text{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q2. Considere o espaço vetorial $C([-\pi, \pi])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([-\pi, \pi]).$$

Seja W o subespaço de $C([-\pi, \pi])$ dado por $W = [1, \sin t, \cos t]$ e recorde que o conjunto $\{1, \sin t, \cos t\}$ é ortogonal. O vetor de W mais próximo de $f(t) = t$ é:

- (a) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos t$;
- (b) $2 \sin t$;
- (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$;
- (d) $2 \cos t$;
- (e) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$.

Q3. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $v, w \in V$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = 1$ e $\langle v, w \rangle = -2$, então $\|v - 5w\| = 7$;
- (II) se U é um subespaço de V de dimensão finita e igual a n e se $e_1, \dots, e_n \in U$ são não nulos e ortogonais dois a dois, então:

$$u = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

para todo $u \in U$;

- (III) se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um subconjunto ortonormal de V com n elementos, então $\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\| = \sqrt{n}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q4. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}),$$

e seja U o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ dado por $U = [x - 1, x - 2]$. Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{x - 1, x - 2\}$ de U , obtemos a base ortogonal:

- (a) $\{x - 1, -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\}$;
- (b) $\{x - 1, -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\}$;
- (c) $\{x - 1, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$;
- (d) $\{x - 1, x + 2\}$;
- (e) $\{x - 1, -x - 2\}$.

Q5. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno canônico. Seja U o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + y = 0 \text{ e } -2x + z + 3t = 0\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3), (-1, 1, 0, 0)]$;
- (b) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3)]$;
- (c) $U^\perp = [(-1, 1, 0, 0)]$;
- (d) $U^\perp = [(-2, 0, 1, 3), (1, 1, 3, 2)]$;
- (e) $U^\perp = [(1, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 3)]$.

Q9. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{33333} p(x)q(x) dx, \quad p, q \in P_5(\mathbb{R}),$$

e o subespaço U de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $U = [1 + x, x^2]$. Sejam $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow U$ e $S : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow U^\perp$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = \text{proj}_U p, \quad S(p) = \text{proj}_{U^\perp} p,$$

para todo $p \in P_5(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) existe uma transformação linear injetora $L : U^\perp \rightarrow \mathbb{R}^5$;
- (b) S é sobrejetora;
- (c) existe uma transformação linear sobrejetora $L : U^\perp \rightarrow \mathbb{R}^5$;
- (d) T é sobrejetora;
- (e) se $L : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$ é uma transformação linear, então a dimensão de $\text{Ker}(L)$ é maior ou igual a 1.

Q10. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e U um subespaço de V de dimensão finita e igual a n . Sejam $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U e $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) existem e são únicos $x \in U$ e $y \in U^\perp$ tais que $v = x + y$;
- (II) o elemento de U mais próximo de v é:

$$\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n;$$

- (III) se W é um subespaço de V tal que $V = U \oplus W$, então $W = U^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q11. Considere o espaço vetorial $C([0, 2])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 2]),$$

e seja U o subespaço de $C([0, 2])$ dado por $U = [1, t]$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 5t$;
- (b) $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 15) + 7t$;
- (c) $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 7t$;
- (d) $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 3t$;
- (e) $\text{proj}_U e^t = \frac{1}{2}(e^2 - 7) + 3t$.

Q12. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $v, w \in V$. Temos que $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ se, e somente se:

- (a) $v = 0$ ou $w = 0$;
- (b) os vetores v e w são linearmente independentes;
- (c) existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu < 0$ e $w = \mu v$;
- (d) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$ e $v = \lambda w$;
- (e) os vetores v e w são linearmente dependentes.

Q13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que:

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todos $v, w \in V$. Assinale a alternativa correta:

- (a) T é necessariamente injetora, mas pode não ser sobrejetora;
- (b) é possível que T não seja nem injetora nem sobrejetora;
- (c) T é necessariamente bijetora;
- (d) T é necessariamente igual à aplicação identidade;
- (e) é possível que T seja sobrejetora e não injetora.

Q14. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X . Seja W o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^t = -X\}.$$

A dimensão de W^\perp é igual a:

- (a) 2;
- (b) 0;
- (c) 1;
- (d) 4;
- (e) 3.

Q15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1) = (1, 2, 1), \quad T(1+x) = (1, a, b), \quad T(1+x+x^2) = (1, 1, 2).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) T não é injetora se, e somente se, $a + b \neq 3$;
- (b) T não é injetora se, e somente se, $a + b = 5$;
- (c) T não é injetora se, e somente se, $a + b = 3$;
- (d) T não é injetora se, e somente se, $a + b \neq 5$;
- (e) T é necessariamente injetora.

Q16. Seja W o subespaço de \mathbb{R}^3 definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $\text{Ker}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$;
- (b) existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$;
- (c) existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$;
- (d) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $\text{Ker}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (0, 0, 1)]$;
- (e) existem infinitas aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $\text{Ker}(T) = W$, $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1)]$ e $T(1, 1, 0) = (2, 2, -2)$.