Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$
$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é $p(t) = (2-t)(t-1)^2$. Suponha que $T(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$. Assinale a alternativa correta:

(a) $T(x, y, z) = \left(\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(b) $T(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(c) $T(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(d) $T(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + z, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - z, x - y + z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(e) $T(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z\right)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Q2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (ax - y, x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

(a) $a < -1$ ou $a > 3$;
(b) $-1 < a < 3$;
(c) $a < 0$ ou $a > 2$;
(d) $a \leq -1$ ou $a \geq 3$;
(e) $0 \leq a \leq 2$.

Q3. Sejam a e b números reais distintos, V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja $p(x) = (x - a)^2(b - x)$. Sejam v_1, v_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor a e w_1, w_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor b. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $v_1 + w_1$ é um autovetor de T;
(b) o conjunto $\{v_1, w_1\}$ é linearmente independente;
(c) o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente dependente;
(d) se $v_1 + v_2 \neq 0$, então $v_1 + v_2$ é um autovetor de T;
(e) se o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, então T é diagonalizável.

Q4. Considere as seguintes afirmações:

(I) se U é um espaço vetorial de dimensão 75, então existe um operador linear $T : U \to U$ tal que:

$$\operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) \cap \operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) \cap \operatorname{Ker}(T - 3\mathrm{I}) \neq \{0\},$$

onde I denota o operador identidade de U;

(II) se o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ está munido do seu produto interno canônico, U é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(U) = 1$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é o operador linear definido por $T(v) = \operatorname{proj}_U v$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(III) se $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ é um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (t - 2)^4(t + 3)^2$, então T é invertível.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q5. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ e $S : P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R}),$$

$$S(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

e seja $H : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $H = S \circ T$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $\dim\big(\operatorname{Ker}(H)\big) = 1$;
(b) o polinômio característico de H é $p(t) = -t(1 - t)^2$;
(c) H é diagonalizável;
(d) os únicos autovalores de H são 0 e 1;
(e) $\operatorname{Ker}(H - \mathrm{I}) = [x^2]$, onde I denota o operador identidade de $P_2(\mathbb{R})$.

Q6. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x, x^3-1\}, \quad \mathcal{C} = \{2, x-1, x^2+1\},$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e de $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

O núcleo de T é gerado pelo vetor:

(a) $3x^3 + 3x^2 - x + 2$;
(b) $3x^3 + 2x^2 - x + 1$;
(c) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;
(d) $3x^3 + x^2 - 2x + 1$;
(e) $2x^3 - x^2 + 2x + 4$.

Q7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Se $\mathrm{Ker}(T) = [e_1+e_2+e_3]$, o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-2)^2$ e T é diagonalizável, então $a^2 - b^2 + c^2$ é igual a:

(a) 3;
(b) 1;
(c) 9;
(d) 7;
(e) 4.

Q8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (3x - y, 2x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que $T^{2014}(0, 1)$ é igual a:

(a) $(1, 1 - 3^{2014})$;
(b) $(1 - 2^{2014}, 2 - 2^{2014})$;
(c) $(1 - 2^{2014}, 2^{2015})$;
(d) $(1 - 2^{2015}, 1 - 3^{2014})$;
(e) $(2^{2015}, 2 - 3^{2014})$.

Q9. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \big\{(-1, 2), (1, -1)\big\}, \quad \mathcal{C} = \big\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\big\},$$

de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(1, 2)$ é igual a:

(a) $(-9, 5, 13)$;
(b) $(3, -1, 10)$;
(c) $(1, 1, 4)$;
(d) $(1, -1, 3)$;
(e) $(-7, -1, 3)$.

Q10. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(p) = \big(p(0), p'(1), p''(2)\big), \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Sejam $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Se a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

então $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$ é igual a:

(a) $-x^2 + 2x + 2$;
(b) $2x^2 - 3$;
(c) $x^2 + 3$;
(d) $2x^2 - 2x + 3$;
(e) $x^2 - 2x + 2$.

Q11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (3x + y + z, y, x + 2y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

A soma dos autovalores de T é igual a:

(a) 2;
(b) 7;
(c) 6;
(d) 5;
(e) 3.

Q12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno canônico. Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \big\{(-1,1),(1,2)\big\},$$

e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T é simétrico;

(II) T não é diagonalizável;

(III) T é diagonalizável, mas não é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhumas das afirmações é verdadeira;

(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q13. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é sobrejetor se, e somente se, para toda base $\mathcal{B}$ de U, vale que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diferente de zero;

(II) se T não for injetor, então existe uma base $\mathcal{B}$ de U tal que, para toda base $\mathcal{C}$ de U, a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ contém uma coluna de zeros;

(III) se $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base de U, $\mathcal{E} = \{e_2, e_3, e_1\}$ e:

$$[T]_{\mathcal{DE}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $T^3 = 0$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (x + 2y, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que:

$$[T \circ S]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^2$. A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $[5(S^2 + \mathrm{I})]_{\text{can}}$ é igual a:

(a) -7;
(b) 5;
(c) 7;
(d) 12;
(e) -5.

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:

(I) se T e S são operadores simétricos, então o operador $T + S$ é diagonalizável;
(II) se T é um operador simétrico invertível, então o operador T^{-1} também é simétrico;
(III) T é invertível se, e somente se, 0 não é um autovalor de T.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q16. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A respeito delas, pode-se afirmar que:

(a) apenas B e C são diagonalizáveis;

(b) apenas A e B são diagonalizáveis;

(c) apenas A e C são diagonalizáveis;

(d) nenhuma delas é diagonalizável;

(e) todas são diagonalizáveis.