

**Q1.** Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 2), (1, -1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\},$$

de  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $T(1, 2)$  é igual a:

- (a)  $(1, 1, 4)$ ;
- (b)  $(3, -1, 10)$ ;
- (c)  $(-9, 5, 13)$ ;
- (d)  $(-7, -1, 3)$ ;
- (e)  $(1, -1, 3)$ .

**Q2.** Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + 1, x^2 + x, x^3 - 1\}, \quad \mathcal{C} = \{2, x - 1, x^2 + 1\},$$

de  $P_3(\mathbb{R})$  e de  $P_2(\mathbb{R})$ , respectivamente. Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

O núcleo de  $T$  é gerado pelo vetor:

- (a)  $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ ;
- (b)  $3x^3 + 2x^2 - x + 1$ ;
- (c)  $3x^3 + x^2 - 2x + 1$ ;
- (d)  $3x^3 + 3x^2 - x + 2$ ;
- (e)  $2x^3 - x^2 + 2x + 4$ .

**Q3.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam  $T : V \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow V$  operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T$  e  $S$  são operadores simétricos, então o operador  $T + S$  é diagonalizável;
- (II) se  $T$  é um operador simétrico invertível, então o operador  $T^{-1}$  também é simétrico;
- (III)  $T$  é invertível se, e somente se,  $0$  não é um autovalor de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

**Q4.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$T(p) = (p(0), p'(1), p''(2)), \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Sejam  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$  uma base de  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Se a matriz de  $T$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

então  $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$  é igual a:

- (a)  $x^2 + 3$ ;
- (b)  $2x^2 - 2x + 3$ ;
- (c)  $x^2 - 2x + 2$ ;
- (d)  $2x^2 - 3$ ;
- (e)  $-x^2 + 2x + 2$ .

**Q5.** Sejam  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$  e  $S : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R}),$$

$$S(a_0 + a_1x) = a_0 + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

e seja  $H : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  o operador linear definido por  $H = S \circ T$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a)  $H$  é diagonalizável;
- (b) os únicos autovalores de  $H$  são 0 e 1;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(H)) = 1$ ;
- (d) o polinômio característico de  $H$  é  $p(t) = -t(1-t)^2$ ;
- (e)  $\text{Ker}(H - I) = [x^2]$ , onde  $I$  denota o operador identidade de  $P_2(\mathbb{R})$ .

**Q6.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é  $p(t) = (2-t)(t-1)^2$ . Suponha que  $T(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T(x, y, z) = (\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- (b)  $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + z, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - z, x - y + z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- (c)  $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- (d)  $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- (e)  $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Q7.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (3x + y + z, y, x + 2y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

A soma dos autovalores de  $T$  é igual a:

- (a) 7;
- (b) 5;
- (c) 6;
- (d) 2;
- (e) 3.

**Q8.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (x + 2y, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e seja  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear tal que:

$$[T \circ S]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Denote por I o operador identidade de  $\mathbb{R}^2$ . A soma dos elementos da diagonal principal da matriz  $[5(S^2 + I)]_{\text{can}}$  é igual a:

- (a)  $-7$ ;
- (b)  $12$ ;
- (c)  $5$ ;
- (d)  $7$ ;
- (e)  $-5$ .

**Q9.** Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A respeito delas, pode-se afirmar que:

- (a) todas são diagonalizáveis;
- (b) apenas  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis;
- (c) nenhuma delas é diagonalizável;
- (d) apenas  $A$  e  $C$  são diagonalizáveis;
- (e) apenas  $A$  e  $B$  são diagonalizáveis.

**Q10.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $\mathcal{B}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Se  $\text{Ker}(T) = [e_1 + e_2 + e_3]$ , o polinômio característico de  $T$  é  $p(t) = -t(t-2)^2$  e  $T$  é diagonalizável, então  $a^2 - b^2 + c^2$  é igual a:

- (a) 1;
- (b) 7;
- (c) 9;
- (d) 4;
- (e) 3.

**Q11.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (3x - y, 2x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que  $T^{2014}(0, 1)$  é igual a:

- (a)  $(1 - 2^{2015}, 1 - 3^{2014})$ ;
- (b)  $(1 - 2^{2014}, 2^{2015})$ ;
- (c)  $(2^{2015}, 2 - 3^{2014})$ ;
- (d)  $(1, 1 - 3^{2014})$ ;
- (e)  $(1 - 2^{2014}, 2 - 2^{2014})$ .

**Q12.** Sejam  $a$  e  $b$  números reais distintos,  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Suponha que o polinômio característico de  $T$  seja  $p(x) = (x - a)^2(b - x)$ . Sejam  $v_1, v_2$  autovetores distintos de  $T$  associados ao autovalor  $a$  e  $w_1, w_2$  autovetores distintos de  $T$  associados ao autovalor  $b$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se o conjunto  $\{v_1, v_2\}$  é linearmente independente, então  $T$  é diagonalizável;
- (b) o conjunto  $\{w_1, w_2\}$  é linearmente dependente;
- (c) o conjunto  $\{v_1, w_1\}$  é linearmente independente;
- (d) se  $v_1 + v_2 \neq 0$ , então  $v_1 + v_2$  é um autovetor de  $T$ ;
- (e)  $v_1 + w_1$  é um autovetor de  $T$ .

**Q13.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  munido do seu produto interno canônico. Seja  $\mathcal{B}$  a base de  $\mathbb{R}^2$  dada por:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1), (1, 2)\},$$

e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $\mathcal{B}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é simétrico;
- (II)  $T$  não é diagonalizável;
- (III)  $T$  é diagonalizável, mas não é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q14.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $U$  é um espaço vetorial de dimensão 75, então existe um operador linear  $T : U \rightarrow U$  tal que:

$$\text{Ker}(T - \mathbf{I}) \cap \text{Ker}(T - 2\mathbf{I}) \cap \text{Ker}(T - 3\mathbf{I}) \neq \{0\},$$

onde  $\mathbf{I}$  denota o operador identidade de  $U$ ;

- (II) se o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  está munido do seu produto interno canônico,  $U$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $\dim(U) = 1$  e  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é o operador linear definido por  $T(v) = \text{proj}_U v$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^4$ , então existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- (III) se  $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  é um operador linear cujo polinômio característico é  $p(t) = (t - 2)^4(t + 3)^2$ , então  $T$  é invertível.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q15.** Sejam  $U$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : U \rightarrow U$  um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é sobrejetor se, e somente se, para toda base  $\mathcal{B}$  de  $U$ , vale que o determinante da matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diferente de zero;
- (II) se  $T$  não for injetor, então existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $U$  tal que, para toda base  $\mathcal{C}$  de  $U$ , a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  contém uma coluna de zeros;
- (III) se  $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$  é uma base de  $U$ ,  $\mathcal{E} = \{e_2, e_3, e_1\}$  e:

$$[T]_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então  $T^3 = 0$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

**Q16.** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por:

$$T(x, y) = (ax - y, x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que  $T$  é diagonalizável se, e somente se:

- (a)  $0 \leq a \leq 2$ ;
- (b)  $a < 0$  ou  $a > 2$ ;
- (c)  $-1 < a < 3$ ;
- (d)  $a \leq -1$  ou  $a \geq 3$ ;
- (e)  $a < -1$  ou  $a > 3$ .