Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno canônico e seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que:

$$T(1,-2,-1,3) = T(-1,0,2,1) = (0,0,0,0)$$

e $\mathrm{Im}(T) = [(4,1,2,0),(1,2,0,1),(2,-3,2,-2)]$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Im}(T)$, mas $\mathrm{Ker}(T) \neq \mathrm{Im}(T)$;
(b) $\mathrm{Ker}(T) \subset \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$, mas $\mathrm{Ker}(T) \neq \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$;
(c) $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(T)$, mas $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp} \neq \mathrm{Ker}(T)$;
(d) $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$;
(e) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

Q2. Seja V um espaço vetorial e sejam $v, w, z \in V$ vetores dois a dois distintos e não nulos. Considere as seguintes afirmações:

(I) $v \in [w, z]$ se, e somente se, $\{v, w, z\}$ é linearmente dependente;
(II) $[2v + w + z, w - z] = [v + w, v + z]$;
(III) $z \notin [v, w]$ se, e somente se, $\dim\big([v, w, z]\big) = 1 + \dim\big([v, w]\big)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q3. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3), \quad p, q \in P_5(\mathbb{R}).$$

Seja S o subespaço de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $S = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]$, onde:

$$p_1(t) = 1 - 2t + t^2 + 3t^3 - t^4 + t^5, \quad p_2(t) = 2 + t - 3t^2 - 2t^3 + t^4 - 2t^5,$$
$$p_3(t) = -5t + 5t^2 + 8t^3 - 3t^4 + 4t^5, \quad p_4(t) = 3 + 4t - 7t^2 - 7t^3 + 3t^4 - 5t^5,$$
$$p_5(t) = 5 - 5t + 7t^3 - 2t^4 + t^5.$$

A dimensão de $S^\perp$ é igual a:

(a) 4;
(b) 1;
(c) 2;
(d) 3;
(e) 5.

Q4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam S um subespaço de V e $v \in V$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que pode ser **FALSA**:

(a) $\operatorname{proj}_S v = \operatorname{proj}_{S^\perp} v$ se, e somente se, $v = 0$;
(b) $\|\operatorname{proj}_S v\| = \|\operatorname{proj}_{S^\perp} v\|$;
(c) $\operatorname{proj}_{S^\perp} v = v - \operatorname{proj}_S v$;
(d) $v \in S$ se, e somente se, $\|\operatorname{proj}_S v\| = \|v\|$;
(e) $\|\operatorname{proj}_S v\| \leq \|v\|$.

Q5. Recorde que uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ é dita *ortogonal*, se $MM^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}$, onde M^{t} denota a transposta da matriz M e $\mathrm{I} \in M_n(\mathbb{R})$ denota a matriz identidade. Seja $M \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal e considere as seguintes afirmações:

(I) $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$;
(II) 1 é autovalor de M;
(III) as linhas de M formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q6. Sejam E e F espaços vetoriais, $T : E \to F$ uma transformação linear e sejam $v_1, \dots, v_n \in E$ vetores tais que $E = [v_1, \dots, v_n]$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em E e $x \in E$ satisfaz $\langle x, v_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, então $x = 0$;

(II) se os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são dois a dois distintos e o conjunto $\big\{T(v_1), \dots, T(v_n)\big\}$ é linearmente independente, então T é injetora;

(III) se E e F têm dimensão finita e T é sobrejetora, então existe uma transformação linear $S : F \to E$ tal que $(T \circ S)(u) = u$, para todo $u \in F$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q7. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Seja $g(t) = at + b$ o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo do polinômio $f(t) = t^3$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $a = \frac{14}{5}$ e $b = \frac{3}{5}$;
(b) $a = 1$ e $b = 2$;
(c) $a = -\frac{4}{5}$ e $b = \frac{7}{5}$;
(d) $a = -3$ e $b = 2$;
(e) $a = \frac{13}{5}$ e $b = \frac{4}{5}$.

Q8. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = [(1,2,1),(-1,0,1)]$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz as seguintes condições:

- T é simétrico com respeito ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$;
- $T(v) = v$, para todo $v \in S$;
- T não é injetor.

Temos que $T(0,3,6)$ é igual a:

(a) $(-1,4,5)$;
(b) $(1,1,-1)$;
(c) $(2,3,1)$;
(d) $(0,3,6)$;
(e) $(2,4,2)$.

Q9. Considere a base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Denote por $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ as coordenadas da matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix}$$

na base $\mathcal{B}$. Temos que $2\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ se, e somente se:

(a) $a + b = 1$;
(b) $a + b = 0$;
(c) $b = 1$;
(d) $a = 1$;
(e) $a + b = -1$.

Q10. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e defina $(c, d) = T^{-1}(a, b)$, onde T^{-1} denota a transformação linear inversa de T. Temos que $c + d$ é igual a:

(a) $6a - 2b$;
(b) $4a - 2b$;
(c) $2a + 3b$;
(d) $2a - 6b$;
(e) $3a + 2b$.

Q11. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$$

e tal que $1+t^2$ e $-t+2t^2$ sejam autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores 1 e 2. Temos que $T(1-t^2)$ é igual a:

(a) $2 - 2t^2$;
(b) $3 + 2t - t^2$;
(c) $1 - t + 3t^2$;
(d) $3 + 4t - 5t^2$;
(e) $1 - 2t + 5t^2$.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(3,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T(-2,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2b \end{pmatrix}.$$

Temos que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$ se, e somente se:

(a) $b = \frac{3}{2}$;
(b) $a = -1$ e $b = 1$;
(c) $a = \frac{3}{2}$ e $b = 1$;
(d) $a = -1$ e $b = \frac{3}{2}$;
(e) $a = -1$.

Q13. Considere os subespaços:

$$S_1 = [(1,2,2,-1),(2,1,4,-5),(0,1,0,1)],$$
$$S_2 = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = 0 \text{ e } 5z + 4w = 0\big\}$$

de $\mathbb{R}^4$. Temos que $\dim(S_1 \cap S_2)$ é igual a:

(a) 1;
(b) 0;
(c) 4;
(d) 3;
(e) 2.

Q14. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno com respeito ao qual a base:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1),(1,2)\big\}$$

é ortonormal. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x,y) = (ax + by, by), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que o operador T é simétrico se, e somente se:

(a) $3a + 2b = 0$;
(b) $a + 2b = 0$;
(c) $2a + 3b = 0$;
(d) $3a + b = 0$;
(e) $a + 3b = 0$.

Q15. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 - t, 1 + t, t^2\}, \quad \mathcal{C} = \big\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\big\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Temos que o núcleo de T é igual a:

(a) $[2 - 7t + t^2]$;
(b) $[1 - t, 7t - t^2]$;
(c) $[4 - 3t + 2t^2]$;
(d) $[1 - 2t^2, 1 + 2t^2]$;
(e) $[1 - 7t + 2t^2]$.

Q16. Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\big\}$$

e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) = 2$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$;

(b) T é injetor;

(c) T é simétrico com respeito ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$;

(d) T é diagonalizável;

(e) $(1,1,1)$ é um autovetor de T.