

Q1. Recorde que uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ é dita *ortogonal*, se $MM^t = I$, onde M^t denota a transposta da matriz M e $I \in M_n(\mathbb{R})$ denota a matriz identidade. Seja $M \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal e considere as seguintes afirmações:

- (I) $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$;
- (II) 1 é autovalor de M ;
- (III) as linhas de M formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n com respeito ao produto interno canônico de \mathbb{R}^n .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q2. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$$

e tal que $1+t^2$ e $-t+2t^2$ sejam autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores 1 e 2. Temos que $T(1-t^2)$ é igual a:

- (a) $1 - t + 3t^2$;
- (b) $3 + 4t - 5t^2$;
- (c) $1 - 2t + 5t^2$;
- (d) $2 - 2t^2$;
- (e) $3 + 2t - t^2$.

Q3. Seja \mathcal{B} a base de \mathbb{R}^3 dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}, \text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de \mathbb{R}^3 . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) T é diagonalizável;
- (b) $(1, 1, 1)$ é um autovetor de T ;
- (c) T é injetor;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 2$, onde I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 ;
- (e) T é simétrico com respeito ao produto interno canônico de \mathbb{R}^3 .

Q4. Considere a base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Denote por $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ as coordenadas da matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix}$$

na base \mathcal{B} . Temos que $2\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ se, e somente se:

- (a) $a + b = 0$;
- (b) $b = 1$;
- (c) $a + b = 1$;
- (d) $a + b = -1$;
- (e) $a = 1$.

Q5. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Seja $g(t) = at + b$ o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo do polinômio $f(t) = t^3$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $a = -\frac{4}{5}$ e $b = \frac{7}{5}$;
- (b) $a = 1$ e $b = 2$;
- (c) $a = \frac{14}{5}$ e $b = \frac{3}{5}$;
- (d) $a = -3$ e $b = 2$;
- (e) $a = \frac{13}{5}$ e $b = \frac{4}{5}$.

Q6. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido do produto interno com respeito ao qual a base:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

é ortonormal. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (ax + by, by), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que o operador T é simétrico se, e somente se:

- (a) $3a + 2b = 0$;
- (b) $2a + 3b = 0$;
- (c) $a + 2b = 0$;
- (d) $3a + b = 0$;
- (e) $a + 3b = 0$.

Q7. Sejam E e F espaços vetoriais, $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear e sejam $v_1, \dots, v_n \in E$ vetores tais que $E = [v_1, \dots, v_n]$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em E e $x \in E$ satisfaz $\langle x, v_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, então $x = 0$;
- (II) se os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são dois a dois distintos e o conjunto $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é linearmente independente, então T é injetora;
- (III) se E e F têm dimensão finita e T é sobrejetora, então existe uma transformação linear $S : F \rightarrow E$ tal que $(T \circ S)(u) = u$, para todo $u \in F$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q8. Considere os subespaços:

$$S_1 = [(1, 2, 2, -1), (2, 1, 4, -5), (0, 1, 0, 1)],$$

$$S_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = 0 \text{ e } 5z + 4w = 0\}$$

de \mathbb{R}^4 . Temos que $\dim(S_1 \cap S_2)$ é igual a:

- (a) 4;
- (b) 1;
- (c) 0;
- (d) 3;
- (e) 2.

Q9. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 - t, 1 + t, t^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e de \mathbb{R}^4 , respectivamente. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Temos que o núcleo de T é igual a:

- (a) $[4 - 3t + 2t^2]$;
- (b) $[2 - 7t + t^2]$;
- (c) $[1 - t, 7t - t^2]$;
- (d) $[1 - 2t^2, 1 + 2t^2]$;
- (e) $[1 - 7t + 2t^2]$.

Q10. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e defina $(c, d) = T^{-1}(a, b)$, onde T^{-1} denota a transformação linear inversa de T . Temos que $c + d$ é igual a:

- (a) $6a - 2b$;
- (b) $2a - 6b$;
- (c) $3a + 2b$;
- (d) $2a + 3b$;
- (e) $4a - 2b$.

Q11. Considere o subespaço S de \mathbb{R}^3 dado por:

$$S = [(1, 2, 1), (-1, 0, 1)]$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz as seguintes condições:

- T é simétrico com respeito ao produto interno canônico de \mathbb{R}^3 ;
- $T(v) = v$, para todo $v \in S$;
- T não é injetor.

Temos que $T(0, 3, 6)$ é igual a:

- (a) $(1, 1, -1)$;
- (b) $(-1, 4, 5)$;
- (c) $(0, 3, 6)$;
- (d) $(2, 3, 1)$;
- (e) $(2, 4, 2)$.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$T(-2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2b \end{pmatrix}.$$

Temos que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ se, e somente se:

- (a) $b = \frac{3}{2}$;
- (b) $a = -1$ e $b = 1$;
- (c) $a = \frac{3}{2}$ e $b = 1$;
- (d) $a = -1$ e $b = \frac{3}{2}$;
- (e) $a = -1$.

Q13. Considere o espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3), \quad p, q \in P_5(\mathbb{R}).$$

Seja S o subespaço de $P_5(\mathbb{R})$ dado por $S = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]$, onde:

$$p_1(t) = 1 - 2t + t^2 + 3t^3 - t^4 + t^5, \quad p_2(t) = 2 + t - 3t^2 - 2t^3 + t^4 - 2t^5,$$
$$p_3(t) = -5t + 5t^2 + 8t^3 - 3t^4 + 4t^5, \quad p_4(t) = 3 + 4t - 7t^2 - 7t^3 + 3t^4 - 5t^5,$$
$$p_5(t) = 5 - 5t + 7t^3 - 2t^4 + t^5.$$

A dimensão de S^\perp é igual a:

- (a) 2;
- (b) 5;
- (c) 3;
- (d) 1;
- (e) 4.

Q14. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno canônico e seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que:

$$T(1, -2, -1, 3) = T(-1, 0, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

e $\text{Im}(T) = [(4, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 1), (2, -3, 2, -2)]$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T)$, mas $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$;
- (b) $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;
- (c) $\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T))^\perp$;
- (d) $\text{Ker}(T) \subset (\text{Im}(T))^\perp$, mas $\text{Ker}(T) \neq (\text{Im}(T))^\perp$;
- (e) $(\text{Im}(T))^\perp \subset \text{Ker}(T)$, mas $(\text{Im}(T))^\perp \neq \text{Ker}(T)$.

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam S um subespaço de V e $v \in V$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que pode ser **FALSA**:

- (a) $v \in S$ se, e somente se, $\|\text{proj}_S v\| = \|v\|$;
- (b) $\|\text{proj}_S v\| \leq \|v\|$;
- (c) $\text{proj}_S v = \text{proj}_{S^\perp} v$ se, e somente se, $v = 0$;
- (d) $\text{proj}_{S^\perp} v = v - \text{proj}_S v$;
- (e) $\|\text{proj}_S v\| = \|\text{proj}_{S^\perp} v\|$.

Q16. Seja V um espaço vetorial e sejam $v, w, z \in V$ vetores dois a dois distintos e não nulos. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $v \in [w, z]$ se, e somente se, $\{v, w, z\}$ é linearmente dependente;
- (II) $[2v + w + z, w - z] = [v + w, v + z]$;
- (III) $z \notin [v, w]$ se, e somente se, $\dim([v, w, z]) = 1 + \dim([v, w])$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.