Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. Se λ for um autovalor de um operador linear $T\colon V \to V$, então o auto-espaço associado a λ será denotado por $V(\lambda)$.

Q1. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear tal que

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{1, x, x^2\}$ e $C = \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$. Então, podemos afirmar que

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [x^2 + 3x - 2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,1,2), (0,1,0,2)]$.
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [x^2 - 3x - 2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,1,2), (0,1,0,2)]$.
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [x^2 - 3x - 2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,1,0), (0,1,0,1)]$.
(d) $\mathrm{Ker}(T) = [x^2 - 3x + 2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,1,2), (0,1,0,1)]$.
(e) $\mathrm{Ker}(T) = [x^2 + 3x - 2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,1,0), (0,1,0,1)]$.

Q2. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz com autovalores -1 e 3 associados aos autovetores $(1,-1)$ e $(1,1)$, respectivamente. Então A^{10} é igual a

(a) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - 3^{10} & 1 + 3^{10} \\ -1 + 3^{10} & 1 - 3^{10} \end{bmatrix}$.

(b) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 + 3^{10} & 1 + 3^{10} \\ 1 + 3^{10} & -1 + 3^{10} \end{bmatrix}$.

(c) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - 3^{10} & 1 + 3^{10} \\ -1 - 3^{10} & -1 + 3^{10} \end{bmatrix}$.

(d) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + 3^{10} & -1 + 3^{10} \\ -1 + 3^{10} & 1 + 3^{10} \end{bmatrix}$.

(e) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 - 3^{10} & 1 - 3^{10} \\ -1 + 3^{10} & 1 + 3^{10} \end{bmatrix}$.

Q3. Seja V um espaço vetorial e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Seja λ um número real tal que λ^2 seja um autovalor de T^2 associado ao autovetor u. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) λ^4 é um autovalor de T^4 associado ao autovetor u.

(b) λ é um autovalor de T associado ao autovetor u.

(c) Se T é invertível, então $T^{-1}(u) = \dfrac{1}{\lambda^2} T(u)$.

(d) $\lambda^2 u \in \mathrm{Im}(T)$.

(e) Se $\lambda = 0$, então $T(u) \in \mathrm{Ker}(T)$.

Q4. Seja $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ o operador linear cuja matriz com relação à base $B = \{x, x-1\}$ seja $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $T(a+bx) = -4a - b + (3a+b)x$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(II) O polinômio $q(x) = 3 + 2x$ pertence à imagem de T.

(III) O polinômio $p(x) = 1 + x$ pertence ao núcleo de T.

Assinale a alternativa correta.

(a) Todas as afirmações são verdadeiras.

(b) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira

(e) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $T(3,5,6)$ é igual a

(a) $(1,-3,0)$.
(b) $(-3,2,4)$.
(c) $(2,3,-5)$.
(d) $(-4,6,-2)$.
(e) $(2,-6,4)$.

Q6. Sejam $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ e $G\colon \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ transformações lineares tais que

$$[F]_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{C,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{1+x, x, x+x^2\}$ e $C = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$. Então, uma base para $\operatorname{Ker}(G \circ F)$ é

(a) $\{-1-x+x^2\}$.
(b) $\{1-x+x^2\}$.
(c) $\{1-x-x^2\}$.
(d) $\{1-x+x^2, x\}$.
(e) $\{1+x+x^2, 1-x\}$.

Q7. Considere o operador linear $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ cuja matriz com relação à base $B = \{1, 2x+3\}$ seja $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Então, uma matriz M que satisfaz $M^{-1}[T]_B M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Q8. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear com dois autovalores reais distintos α e β. Considere as seguintes afirmações.

(I) Todas as raízes do polinômio característico de T são reais.
(II) T é sempre invertível.
(III) Se T é diagonalizável e $p_T(t) = (t-\alpha)q(t)$, onde $q(t)$ é um polinômio que satisfaz $q(\alpha) \neq 0$, então $\dim(V(\beta)) = 2$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(c) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q9. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear com

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{(1,0),(1,1)\}$ e $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Então, o valor do determinante da matriz $T(3,2)$ é igual a

(a) 2.
(b) 6.
(c) 5.
(d) 9.
(e) 7.

Q10. Seja V um espaço vetorial e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Sejam u e v autovetores distintos de T associados aos autovalores α e β, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\alpha = \beta$, então $u - v$ é um autovetor de T associado ao autovalor α.
(II) Se $\alpha \neq \beta$, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $2u - \gamma v$ seja um autovetor de T.
(III) Se $\alpha = \beta \neq 0$, então $u - v$ é um autovetor de T associado ao autovalor 0.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q11. Se $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é um operador linear tal que 1 seja um autovalor de T e $\operatorname{Ker}(T) = [x-1, x^2+1]$, então o polinômio característico de T é

(a) $p_T(t) = -t^2(t-1)$.
(b) $p_T(t) = -t^2(t+1)$.
(c) $p_T(t) = -t(t-1)^2$.
(d) $p_T(t) = -t(t+1)^2$.
(e) $p_T(t) = -(t-1)(t^2+1)$.

Q12. Seja V um espaço vetorial e seja $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de V. Seja $T\colon V \to V$ o operador linear tal que

$$[T]_E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$.
(b) $\operatorname{Ker}(T) = [(1,1,0,1)_E]$.
(c) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 4$.
(d) $\operatorname{Im}(T) = [(-1,1,0,1)_E, (0,1,0,2)_E, (-1,2,0,3)_E]$.
(e) $\operatorname{Ker}(T) = [e_1, e_2, e_4]$.

Q13. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear com polinômio característico $p_T(t) = (t-1)^2(t-3)^2$. Podemos afirmar que

(a) T não é diagonalizável, pois $p_T(t)$ só possui duas raízes reais distintas.
(b) T é diagonalizável, pois todas as raízes de $p_T(t)$ são reais.
(c) T não é diagonalizável, pois $p_T(t)$ tem uma raiz de multiplicidade 2.
(d) T é diagonalizável se, e somente se, $M_2(\mathbb{R}) = V(1) \oplus V(3)$
(e) T é diagonalizável se, e somente se, $\dim(V(1)) = 2$.

Q14. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que satisfaz

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

onde C denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) Não existe uma matriz $M \in M_3(\mathbb{R})$ invertível tal que $M^{-1}[T]_C M$ seja diagonal.
(b) Os autovalores de T não são todos reais.
(c) $\dim(V(2)) = 1$.
(d) T é diagonalizável.
(e) T é invertível.

Q15. Sejam $(1,0,2)$ e $(0,1,1)$ autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Se $\mathrm{Ker}(T) = [(1,0,0)]$, então $T(1,3,7)$ é igual a

(a) $(2,-3,1)$.
(b) $(-3,2,2)$.
(c) $(1,2,1)$.
(d) $(2,1,1)$.
(e) $(-2,1,1)$.

Q16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Assinale a afirmação verdadeira.

(a) T sempre admite n autovalores distintos.
(b) Se 0 é um autovalor de T, então T é invertível.
(c) Se $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 1$, então T não é diagonalizável.
(d) T é sempre diagonalizável.
(e) Se λ_1 e λ_2 são autovalores de T e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0_V\}$.