Q1. Sejam V um espaço vetorial, n um inteiro positivo e $v_1, \ldots, v_n$ elementos não nulos e distintos de V. Se V é gerado por $v_1, \ldots, v_n$, pode-se afirmar que:

(a) toda base de V tem n elementos;
(b) se $\dim(V) = n$ então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V;
(c) a dimensão de V é n;
(d) o espaço V tem no máximo n elementos não nulos;
(e) todo conjunto de geradores de V tem n elementos.

Q2. Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a solução da equação diferencial:

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 0$. O valor de $y(1)$ é:

(a) $1 - e$;
(b) $-1 + e$;
(c) $2 - e$;
(d) $2 + e$;
(e) $1 + e$.

Q3. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ formado pelas soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z + w + t = 0, \\ y + w + t = 0, \\ ax + y + z + w + t = 0. \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 2$, para todo $a \neq 1$;
(b) $\dim(S) = 3$, para todo $a \neq 1$;
(c) $\dim(S) = 2$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
(d) $\dim(S) = 3$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
(e) $\dim(S) = 2$, se $a = 1$.

Q4. Considere a seguinte base de $P_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, t + 2t^2, 1 + 2t + 4t^2\}.$$

As coordenadas do polinômio $p(t) = -1 + t$ na base $\mathcal{B}$ são:

(a) $(2, -3, 5)$;
(b) $(-2, 5, -3)$;
(c) $(-2, -5, -3)$;
(d) $(2, 5, -3)$;
(e) $(2, -5, -3)$.

Q5. Considere os polinômios:

$$p_1(x) = 1 + x + 3x^2 + x^3, \quad p_2(x) = 1 + 2x^2 + x^3,$$
$$p_3(x) = 4 + x + 9x^2 + 4x^3, \quad p_4(x) = 2 + 2x + 8x^2 + 2x^3,$$

e seja S o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ gerado por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 2$;
(b) existe uma base de $P_3(\mathbb{R})$ que contém $\{p_2, p_3, p_4\}$;
(c) $S = P_3(\mathbb{R})$;
(d) existe uma base de $P_3(\mathbb{R})$ que contém $\{p_1, p_2, p_3\}$;
(e) o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ gera S.

Q6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \{1, e^{at}, e^{bt}\}$. Pode-se afirmar que $\mathcal{B}$ é uma base do espaço das soluções da equação diferencial:

$$y''' - (a + b)y'' + aby' = 0$$

se e somente se:

(a) $a \neq 1$, $b \neq 1$ e $a = b$;
(b) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq b$;
(c) $a \neq 1$, $b \neq 1$ e $a \neq b$;
(d) $a \neq b$;
(e) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a = b$.

Q7. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$S_1 = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ é duas vezes derivável e } f'' = f'\big\},$$
$$S_2 = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(x) = f(-x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\big\},$$
$$S_3 = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(-1) + f(1) = 0\big\},$$
$$S_4 = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(x) \text{ é um número racional, para todo } x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) apenas S_1, S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$;
(b) apenas S_1, S_2 e S_4 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$;
(c) apenas S_1 e S_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$;
(d) apenas S_2, S_3 e S_4 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$;
(e) apenas S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Q8. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a = 0,\ b = c = d \right\}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) a dimensão de W é 2;
(b) a dimensão de W é 3;
(c) existe um subconjunto de W linearmente independente com dois elementos distintos;
(d) todo subconjunto finito de W é linearmente dependente;
(e) todo subconjunto de W com dois elementos distintos gera W.

Q9. Seja $AX = 0$ um sistema linear homogêneo com n equações e m incógnitas e seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ formado pelas soluções desse sistema. Considere as seguintes afirmações:

(I) $m = n$;
(II) a matriz A é inversível;
(III) $\dim(W) = 0$.

Assinale a alternativa correta:

(a) sempre que a afirmação (I) for verdadeira, a afirmação (II) também será verdadeira;
(b) sempre que as afirmações (I) e (II) forem ambas verdadeiras, a afirmação (III) também será verdadeira;
(c) sempre que a afirmação (I) for verdadeira, a afirmação (III) também será verdadeira;
(d) nenhuma das outras alternativas é correta;
(e) sempre que a afirmação (III) for verdadeira, as afirmações (I) e (II) também serão verdadeiras.

Q10. Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$:

$$S = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = x_5,\ 2x_3 + x_4 = x_5,\\ 3x_1 + 3x_2 = 4x_3 + 2x_4 + x_5\big\}.$$

A dimensão de S é igual a:

(a) 2;
(b) 3;
(c) 5;
(d) 1;
(e) 4.

Q11. Sejam V um espaço vetorial, A um subconjunto finito de V e seja v um elemento de V. Denote por n o número de elementos de A. Pode-se afirmar que:

(a) se A é linearmente dependente então o vetor nulo de V está em A;
(b) se $v \in [A]$ então existe $u \in A$ tal que $u \in [(A \setminus \{u\}) \cup \{v\}]$, onde $A \setminus \{u\}$ denota o conjunto obtido de A pela remoção do elemento u;
(c) se $v \in [A]$ então existem $u \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $v = \lambda u$;
(d) se $[A] = [A \cup \{v\}]$ então $\dim\big([A]\big) = n$;
(e) se $\dim\big([A]\big) = n$ então A é linearmente independente.

Q12. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Para $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, a matriz $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ pertence a W se e somente se:

(a) $-x + t = -y$;
(b) $2x - t = -y$;
(c) $-x - t = -y$;
(d) $2x + t = -y$;
(e) $-t + x = -y$.

Q13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + bz = a, \\ x + y + 4z = 3, \\ x + z = b. \end{cases}$$

A respeito desse sistema, pode-se afirmar que:

(a) é impossível se e somente se $b = 1$ e $a \neq b$;
(b) tem um número infinito de soluções se e somente se $b \neq 1$ e $a = b$;
(c) é impossível para todos $a, b \in \mathbb{R}$;
(d) é impossível se e somente se $b \neq 1$ e $a = b$;
(e) tem solução única se e somente se $b \neq 1$ e $a = b$.

Q14. Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = b + c \right\}, \quad T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $S = T$;
(b) $T \subset S$ e $T \neq S$;
(c) todo elemento de $M_2(\mathbb{R})$ é a soma de um elemento de S com um elemento de T;
(d) $S \subset T$ e $S \neq T$;
(e) o único elemento que pertence a S e a T simultaneamente é a matriz nula.

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e sejam:

$$A = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}, \quad B = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$$

subconjuntos de V, onde $u_1, \ldots, u_p$ são dois a dois distintos e $v_1, \ldots, v_q$ são dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

(I) se A é linearmente independente e B é linearmente dependente, pode-se concluir que $q \geq p$;

(II) se A é linearmente independente e $q \geq n$ então $q \geq p$;

(III) se B gera V e $n \geq p$ então $q \geq p$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q16. Dado $a \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que $\{1 + ax, x + ax^2, a - ax^2, x^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ se e somente se:

(a) $a \neq 1$;

(b) $a \neq 0$;

(c) $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$;

(d) $a = -1$;

(e) $a = 1$ ou $a = -1$.