Q1. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:

$$S_1 = \big\{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 : x+y+z+w+t = 0\big\},$$
$$S_2 = \big\{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 : y+w+t = 0 \text{ e } y+z+w+t = 0\big\}.$$

Uma base de $S_1 \cap S_2$ é:

(a) $\{(0,-1,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}$;
(b) $\{(0,-1,0,1,0),(0,-1,0,0,-1)\}$;
(c) $\{(0,-1,0,1,0),(0,-2,0,1,1),(0,-1,0,0,1)\}$;
(d) $\{(0,-1,0,1,0),(0,-2,0,1,-1),(0,1,0,0,1)\}$;
(e) $\{(0,-1,0,1,0)\}$.

Q2. Considere a seguinte base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se (a,b,c,d) são as coordenadas da matriz $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ na base $\mathcal{B}$, então pode-se afirmar que:

(a) $a+b+c-d = -1$;
(b) $a+b-c+d = -3$;
(c) $a-b-c+d = -3$;
(d) $a-b+c+d = -1$;
(e) $a+b-c-d = -2$.

Q3. Considere os polinômios:

$$p_1(x) = 1+2x^2+x^3, \quad p_2(x) = 4+x+9x^2+4x^3,$$
$$p_3(x) = 1-x+x^2+x^3, \quad p_4(x) = 3+2x+8x^2+3x^3,$$
$$p_5(x) = 1+x+4x^2+x^3,$$

e seja S o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ gerado por $\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\{p_1,p_2,p_5\}$ é uma base de S;
(b) $\{p_1,p_2,p_4\}$ é uma base de S;
(c) $\{p_1,p_2,p_3,p_5\}$ é uma base de S;
(d) $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ é uma base de S;
(e) a dimensão de S é igual a 5.

Q4. Considere o seguinte subespaço de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \\ e & 0 \end{smallmatrix}\right) : a+b=d,\ c+d=e,\ a+b-2c-3d+2e=0 \right\}.$$

A dimensão de S é igual a:

(a) 3;
(b) 2;
(c) 1;
(d) 4;
(e) 5.

Q5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então pode-se afirmar que:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$ se e somente se:

(a) $ab \neq -2$;
(b) $ab \neq 1$;
(c) $ab \neq 2$;
(d) $ab \neq -1$;
(e) $ab \neq 3$.

Q6. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a-b-c=0\},$$
$$S_2 = [(1,0,-1,0),(0,1,1,0)].$$

Pode-se afirmar que (a,b,c,d) pertence ao subespaço $S_1 \cap S_2$ se e somente se:

(a) $a=b$ e $c=d=0$;
(b) $b=c$ e $a=d=0$;
(c) $a=-c$ e $b=d=0$;
(d) $a=-d$ e $b=c=0$;
(e) $c=-d$ e $a=b=0$.

Q7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ formado pelas soluções (x, y, z, w, t) do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z + w + t = 0, \\ z + w + t = 0, \\ w + t = 0, \\ az - bw + ct = 0. \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 2$ se e somente se $b = -c$;

(b) $\dim(S) = 2$ se e somente se $b = c$;

(c) $\dim(S) = 3$ se e somente se $b = -c$;

(d) $\dim(S) = 3$ se e somente se $b = c$;

(e) $\dim(S) = 1$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Q8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto gerador de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) $m \geq n$;

(II) $m \leq n$;

(III) $[v_1, \ldots, v_m, u] = [v_1, \ldots, v_m, v]$, para quaisquer $u, v \in V$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja B um subconjunto finito linearmente dependente de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe um subconjunto A de B tal que $A \neq B$ e $[A] = [B]$;

(II) se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ então o conjunto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é linearmente independente;

(III) se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $v_{n+1} \in V$ então o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ é linearmente dependente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q10. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Se $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2 & a \end{smallmatrix}\right) \in S$ então $a - b$ é igual a:

(a) 2;
(b) -1;
(c) -2;
(d) 1;
(e) 0.

Q11. Considere os seguintes subespaços de $P_3(\mathbb{R})$:

$$S_1 = \left\{2a + bx + 2bx^2 - ax^3 : a, b \in \mathbb{R}\right\},$$
$$S_2 = [2 + x + 2x^2 + x^3, 2 - x^3, 6 + 4x + 8x^2 + 5x^3].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S_1) = \dim(S_2)$, mas $S_1 \neq S_2$;
(b) $S_1 = S_2$;
(c) $\dim(S_1) = 2$ e $\dim(S_2) = 3$;
(d) $\dim(S_1) < \dim(S_2)$;
(e) $\dim(S_2) < \dim(S_1)$.

Q12. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}, \quad B = \{(1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, -1)\},$$
$$C = \{(1, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -1)\}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $[A] = [B]$;
(b) $[A] = [C]$;
(c) $[B] = [C]$;
(d) $[C] \subset [B]$ e $[C] \neq [B]$;
(e) $[C] \subset [A]$ e $[C] \neq [A]$.

Q13. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = [(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)],$$
$$T = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,-1,1)].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(U+T) = 4$ e $\dim(U \cap T) = 2$;
(b) $\dim(U+T) = 4$ e $\dim(U \cap T) = 1$;
(c) $\dim(U+T) = 4$ e $\dim(U \cap T) = 0$;
(d) $\dim(U+T) = 3$ e $\dim(U \cap T) = 3$;
(e) $\dim(U+T) = 2$ e $\dim(U \cap T) = 2$.

Q14. Considere os seguintes subespaços de $P_2(\mathbb{R})$:

$$U = [1 + 2x + 3x^2], \quad T = [2 - x + 6x^2].$$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a + bx + cx^2$ pertence a $U + T$ se e somente se:

(a) $c = 3a$;
(b) $b = 2a$;
(c) $c = 2a$;
(d) $b = 3a$;
(e) $b = c$.

Q15. Seja $n \geq 2$ um inteiro e considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$S_1 = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\big\},$$
$$S_2 = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0\big\},$$
$$S_3 = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\big\},$$
$$S_4 = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\big\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas S_1, S_2 e S_4 são subespaços de $\mathbb{R}^n$;
(b) apenas S_1, S_2 e S_3 são subespaços de $\mathbb{R}^n$;
(c) apenas S_2 e S_4 são subespaços de $\mathbb{R}^n$;
(d) apenas S_1 e S_2 são subespaços de $\mathbb{R}^n$;
(e) apenas S_1 e S_4 são subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Q16. Sejam V um espaço vetorial e S_1, S_2 subespaços de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B}_1$ é uma base de S_1 e $\mathcal{B}_2$ é uma base de S_2 então $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 \cap S_2$;

(II) se $\mathcal{B}_1$ é uma base de S_1 e $\mathcal{B}_2$ é uma base de S_2 então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$;

(III) se $\mathcal{B}_1$ gera S_1 e $\mathcal{B}_2$ gera S_2 então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ gera $S_1 + S_2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.