SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

DANIEL V. TAUSK

1. O problema

Queremos resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas com coeficientes constantes, isto é, dada uma matriz real quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, queremos encontrar funções deriváveis:

$$x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \ldots, \quad x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

tais que:

$$\left\{\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t),\\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t),\\ &\;\;\vdots\\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t),\end{aligned}\right. \tag{1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Chamamos A a *matriz de coeficientes* do sistema (1). Se definimos $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}, \tag{2}$$

e a derivada de x por:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix},$$

então o sistema (1) pode ser escrito de forma mais compacta:

$$x'(t) = Ax(t). \tag{3}$$

Nós trataremos apenas do caso em que a matriz de coeficientes A é diagonalizável (o caso geral utiliza a chamada *forma canônica de Jordan* e está fora do escopo desse curso). Nós consideraremos primeiro (Seção 2) o caso

Date: 5 de novembro de 2008.

em que os autovalores de A (i.e., as raízes do polinômio característico de A) são todos reais e trataremos depois (Seção 3) o caso geral.

Exercício 1.1. Denote por $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todas as funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, munido das operações usuais (i.e., $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ e $(cx)(t) = cx(t)$, para todos $x, y \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$). Mostre que o conjunto das soluções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ do sistema (3) é um subespaço de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Observe que o resultado continua verdadeiro se a matriz de coeficientes A depende de t, i.e., mostre que se $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ é uma função então o conjunto das soluções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ do sistema:

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

é um subespaço de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

O conjunto das soluções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ do sistema (3) (ou do sistema (4)) é chamado o *espaço solução* do sistema.

2. Autovalores reais

Suponha que a matriz de coeficientes A do sistema (3) seja *diagonalizável sobre* $\mathbb{R}$, i.e., que o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é representado pela matriz A na base canônica de $\mathbb{R}^n$ seja diagonalizável. Isso significa que existe uma base:

$$B = (u_1, \ldots, u_n),$$

de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T; seja $\lambda_k \in \mathbb{R}$ o autovalor de T correspondente ao autovetor u_k, i.e.:

$$T(u_k) = Au_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Escreva:

$$[x(t)]_B = \big(\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\big),$$

de modo que:

$$x(t) = \tilde{x}_1(t)u_1 + \cdots + \tilde{x}_n(t)u_n.$$

Temos:

$$x'(t) = \tilde{x}_1'(t)u_1 + \cdots + \tilde{x}_n'(t)u_n \tag{5}$$

e:

$$Ax(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t)u_1 + \cdots + \lambda_n\tilde{x}_n(t)u_n; \tag{6}$$

segue de (5) e (6) que x é solução de (3) se e somente se:

$$\tilde{x}_1'(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t), \quad \ldots, \quad \tilde{x}_n'(t) = \lambda_n\tilde{x}_n(t).$$

Sabemos que a solução geral da equação $\tilde{x}_k'(t) = \lambda_k\tilde{x}_k(t)$ é:

$$\tilde{x}_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde c_k é uma constante real arbitrária. Temos então que a solução geral do sistema (3) é:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}u_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}u_n,$$

sendo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ constantes reais arbitrárias. Concluímos então que o espaço solução do sistema (3) é o subespaço gerado pelas funções:

$$e^{\lambda_1 t} u_1, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n t} u_n. \tag{7}$$

1. *Observação.* As funções (7) são linearmente independentes e em particular constituem uma *base* do espaço solução de (3) (que tem portanto dimensão[1] n). De fato, se $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} u_n = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ então, fazendo $t = 0$, obtemos:

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0.$$

Como os autovetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes, segue que $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

2. **Exemplo.** Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t), \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + x_3(t), \\ x_3'(t) = x_2(t) + 2x_3(t). \end{cases} \tag{8}$$

A matriz de coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda),$$

e seus autovalores são 1 e 3. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o operador que é representado por A na base canônica de $\mathbb{R}^3$ então um cálculo simples mostra que os autoespaços de T são:

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(1,0,0), (0,1,-1)], \quad \mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I}) = [(2,1,1)].$$

Assim, os vetores:

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (0,1,-1), \quad u_3 = (2,1,1),$$

constituem uma base de autovetores de T correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$. A solução geral do sistema (8) é:

$$x(t) = c_1 e^t (1,0,0) + c_2 e^t (0,1,-1) + c_3 e^{3t} (2,1,1),$$

[1] É possível demonstrar, usando um teorema de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais, que mesmo o espaço solução do sistema mais geral (4) possui dimensão n, desde que sejam feitas algumas hipóteses não muito restritivas sobre a função $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (por exemplo, o resultado vale se as entradas da matriz $A(t)$ forem funções contínuas de t).

ou seja:

$$x_1(t) = c_1e^t + 2c_3e^{3t}, \quad x_2(t) = c_2e^t + c_3e^{3t}, \quad x_3(t) = -c_2e^t + c_3e^{3t},$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Temos também que as funções:

$$e^t(1, 0, 0), \quad e^t(0, 1, -1), \quad e^{3t}(2, 1, 1),$$

constituem uma base do espaço solução do sistema (8).

3. Autovalores complexos

Suponha que a matriz de coeficientes A do sistema (3) seja *diagonalizável sobre* $\mathbb{C}$, i.e., que o operador linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ que é representado pela matriz A na base canônica de $\mathbb{C}^n$ seja diagonalizável. Isso significa que existe uma base:

$$B = (u_1, \ldots, u_n),$$

de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de T; seja $\lambda_k \in \mathbb{C}$ o autovalor de T correspondente ao autovetor u_k, i.e.:

$$T(u_k) = Au_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Consideraremos primeiramente o problema de encontrar as *soluções complexas* do sistema (3), i.e., as funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ que satisfazem (3); nesse caso, x escreve-se na forma (2), sendo:

$$x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \ldots, \quad x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

funções deriváveis[2]. Como na Seção 2, escrevemos:

$$[x(t)]_B = \big(\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\big) \in \mathbb{C}^n,$$

de modo que:

$$x(t) = \tilde{x}_1(t)u_1 + \cdots + \tilde{x}_n(t)u_n.$$

Daí, como no caso real, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ é solução de (3) se e somente se:

$$\tilde{x}_1'(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t), \quad \ldots, \quad \tilde{x}_n'(t) = \lambda_n\tilde{x}_n(t).$$

Ocorre que as soluções complexas $\tilde{x}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ da equação $\tilde{x}_k'(t) = \lambda_k\tilde{x}_k(t)$ são as funções da forma (veja Apêndice B para detalhes):

$$\tilde{x}_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

com c_k uma constante *complexa* arbitrária. Temos então que a solução complexa geral do sistema (3) é:

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t}u_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}u_n,$$

sendo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ constantes *complexas* arbitrárias. O espaço das soluções complexas do sistema (3) é um subespaço vetorial complexo do espaço vetorial complexo $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de todas as funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. O espaço das soluções complexas de (3) é o subespaço complexo gerado pelas funções:

$$e^{\lambda_1 t}u_1, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n t}u_n. \tag{9}$$

[2]Veja o Apêndice A para detalhes a respeito de derivadas de funções complexas de variável real.

Como no caso real, mostra-se (usando o mesmo argumento) que as funções (9) são linearmente independentes e conclui-se que o espaço das soluções complexas de (3) é um espaço vetorial complexo de dimensão n (veja Observação 1).

Nas considerações feitas até agora, nós não usamos o fato que a matriz de coeficientes A do sistema de equações diferenciais é real. Assumindo que A seja real, nós gostaríamos de determinar o espaço das soluções *reais* do sistema (3). O resultado a seguir será útil para esse propósito.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, denotamos por $\bar{v}$ o *conjugado* de v definido por $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$.

3. **Proposição.** *Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^n$ por uma matriz* real *A e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T. Então:*

(a) *o conjugado $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de T;*
(b) *os autovalores λ e $\bar{\lambda}$ de T possuem a mesma multiplicidade algébrica;*
(c) *os autovalores λ e $\bar{\lambda}$ de T possuem a mesma multiplicidade geométrica;*
(d) *dado $v \in \mathbb{C}^n$, vale que:*

$$v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I}) \Longleftrightarrow \bar{v} \in \mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I}),$$

i.e., v é um autovetor de T associado ao autovalor λ se e somente se $\bar{v}$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\bar{\lambda}$;
(e) *se $(u_1, \ldots, u_k)$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{I})$ então $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I})$.*

Demonstração. Se $p(t) = \det(A - t\mathrm{I})$ denota o polinômio característico de T então podemos escrever:

$$p(t) = (t - \lambda)^r q(t),$$

onde q é um polinômio tal que $q(\lambda) \neq 0$ e r é a multiplicidade algébrica de λ. Tomando conjugação complexa dos dois lados, obtemos[3]:

$$\bar{p}(t) = (t - \bar{\lambda})^r \bar{q}(t).$$

Como a matriz A é real, o polinômio p também é real e portanto $\bar{p}$ é igual a p; daí:

$$p(t) = (t - \bar{\lambda})^r \bar{q}(t).$$

Como $\bar{q}(\bar{\lambda}) = \overline{q(\lambda)} \neq 0$, concluímos que $\bar{\lambda}$ é raiz do polinômio p com multiplicidade r, i.e., $\bar{\lambda}$ é autovalor de T com multiplicidade algébrica r. Isso demonstra os itens (a) e (b).

[3] O complexo conjugado $\bar{p}$ de um polinômio complexo p é definido tomando conjugação complexa de cada coeficiente. É fácil mostrar que se p, q são polinômios complexos então $\overline{pq} = \bar{p}\bar{q}$.

O item (c) será uma conseqüência imediata do item (e); passemos então à demonstração do item (d). Dado um vetor $v \in \mathbb{C}^n$, temos[4]:

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I}) &\iff T(v) = \lambda v \iff Av = \lambda v \iff \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \\ &\iff A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \iff T(\bar{v}) = \bar{\lambda}\bar{v} \iff \bar{v} \in \mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I}). \end{aligned}$$

Passemos à demonstração do item (e). Seja $(u_1, \ldots, u_k)$ uma base do autoespaço $\mathrm{Ker}(T-\lambda\mathrm{I})$ e vamos mostrar que $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T-\bar{\lambda}\mathrm{I})$. Note que, pelo item (d), os vetores $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ estão em $\mathrm{Ker}(T-\bar{\lambda}\mathrm{I})$, de modo que:

$$[\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k] \subset \mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I}).$$

Agora, dado $v \in \mathrm{Ker}(T-\bar{\lambda}\mathrm{I})$ então $\bar{v}$ está em $\mathrm{Ker}(T-\lambda\mathrm{I})$ e portanto existem escalares $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ tais que:

$$\bar{v} = c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k.$$

Daí:

$$v = \bar{c}_1 \bar{u}_1 + \cdots + \bar{c}_k \bar{u}_k \in [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k],$$

provando que:

$$\mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I}) \subset [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k].$$

Resta mostrar que $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ é linearmente independente. Se $c_1, \ldots, c_k$ são escalares complexos tais que:

$$c_1 \bar{u}_1 + \cdots + c_k \bar{u}_k = 0$$

então:

$$\bar{c}_1 u_1 + \cdots + \bar{c}_k u_k = 0.$$

Como $(u_1, \ldots, u_k)$ é linearmente independente, segue que:

$$\bar{c}_1 = \cdots = \bar{c}_k = 0,$$

donde $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Isso completa a demonstração de que $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ é base de $\mathrm{Ker}(T - \bar{\lambda}\mathrm{I})$. □

4. **Exemplo.** Vamos achar as soluções complexas do sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + 4x_3(t). \end{cases} \tag{10}$$

A matriz de coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é:

$$\det(A - \lambda\mathrm{I}) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = (2 - \lambda)(3 + i - \lambda)(3 - i - \lambda)$$

[4]O conjugado $\bar{A}$ de uma matriz A é definido tomando o complexo conjugado de cada entrada da matriz A. É fácil mostrar que se A, B são matrizes para as quais o produto AB está definido então $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

e seus autovalores são 2, $3+i$ e $3-i$. Se $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ denota o operador linear que é representado por A na base canônica de $\mathbb{C}^3$ então um cálculo simples mostra que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) &= [(2, -3, 2)], \\ \operatorname{Ker}\big(T - (3+i)\mathrm{I}\big) &= [(0, i-1, 2)]. \end{aligned} \tag{11}$$

De (11) e do item (e) da Proposição 3 segue que:

$$\operatorname{Ker}\big(T - (3-i)\mathrm{I}\big) = [(0, -i-1, 2)],$$

já que $(0, -i-1, 2)$ é o conjugado de $(0, i-1, 2)$. Temos então que as soluções complexas de (10) são:

$$x(t) = c_1 e^{2t}(2, -3, 2) + c_2 e^{(3+i)t}(0, i-1, 2) + c_3 e^{(3-i)t}(0, -i-1, 2),$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, as funções:

$$e^{2t}(2, -3, 2), \quad e^{(3+i)t}(0, i-1, 2), \quad e^{(3-i)t}(0, -i-1, 2), \tag{12}$$

constituem uma base do espaço vetorial complexo das soluções complexas de (10).

Note que a base (12) que obtivemos para o espaço das soluções complexas do sistema (10) tem a seguinte propriedade: uma das três funções que constitui essa base é real e as outras duas são mutuamente conjugadas. Em geral, se a matriz de coeficientes A do sistema (3) é real, nós sempre podemos encontrar uma base para o espaço de soluções complexas do sistema (3) que seja formada por funções reais ou por funções complexas que aparecem juntamente com suas conjugadas. De fato, se λ é um autovalor real de A então, resolvendo da forma usual o sistema linear homogêneo com matriz de coeficientes $A - \lambda\mathrm{I}$ para encontrar uma base do autoespaço associado a λ, nós sempre encontraremos vetores reais $u \in \mathbb{R}^n$; as soluções correspondentes $e^{\lambda t}u$ do sistema (3) serão também reais. Por outro lado, se λ é um autovalor complexo não real de A então o conjugado $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A e, em virtude do item (e) da Proposição 3, nós podemos sempre utilizar como base do autoespaço associado a $\bar{\lambda}$ os vetores $\bar{u}$ que são conjugados aos vetores u que nós usamos como base do autoespaço associado a λ. Note que as soluções $e^{\lambda t}u$ e $e^{\bar{\lambda} t}\bar{u}$ do sistema (3) são mutuamente conjugadas.

Nosso objetivo agora é obter uma base para o espaço das soluções complexas de (3) que seja formada *somente* por funções reais: nesse caso, o espaço das soluções reais de (3) será simplesmente o espaço das combinações lineares *com coeficientes reais* das funções da base obtida. A proposição a seguir nos mostra como obter uma base formada só por funções reais.

5. **Proposição.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $f = f_1 + i f_2$, uma função com parte real $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e parte imaginária $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Se $\bar{f} = f_1 - i f_2$ denota a conjugada de f então o subespaço complexo gerado por f e $\bar{f}$ coincide com o subespaço complexo gerado por f_1 e f_2:*

$$[f, \bar{f}] = [f_1, f_2]. \tag{13}$$

Além do mais, f e $\bar{f}$ são linearmente independentes se e somente se f_1 e f_2 forem linearmente independentes.

Demonstração. Como $f = f_1 + if_2$ e $\bar{f} = f_1 - if_2$, temos:

$$[f, \bar{f}] \subset [f_1, f_2].$$

Mas:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad f_2 = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

donde:

$$[f_1, f_2] \subset [f, \bar{f}].$$

Isso prova a igualdade (13). Agora, se f e $\bar{f}$ são linearmente independentes então $[f, \bar{f}]$ tem dimensão 2 e portanto (por (13)) $[f_1, f_2]$ também tem dimensão 2; segue então que f_1 e f_2 também são linearmente independentes. Um raciocínio análogo mostra que f e $\bar{f}$ são linearmente independentes se f_1 e f_2 o forem. □

6. **Exemplo.** Retomando o Exemplo 4, note que as funções:

$$e^{(3+i)t}(0, i-1, 2), \quad e^{(3-i)t}(0, -i-1, 2) \tag{14}$$

que aparecem na base (12) do espaço solução são mutuamente conjugadas e portanto, em virtude da Proposição 5, nós obteremos uma nova base do espaço das soluções complexas de (10) se substituirmos as funções (14) pela parte real e pela parte imaginária de $e^{(3+i)t}(0, i-1, 2)$. Temos:

$$\begin{aligned} e^{(3+i)t}(0, i-1, 2) &= e^{3t}(\cos t + i \operatorname{sen} t)(0, i-1, 2) \\ &= e^{3t}(0, -\cos t - \operatorname{sen} t, 2\cos t) + ie^{3t}(0, \cos t - \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Daí, as funções:

$$\begin{gathered} e^{2t}(2, -3, 2), \\ e^{3t}(0, -\cos t - \operatorname{sen} t, 2\cos t), \quad e^{3t}(0, \cos t - \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), \end{gathered} \tag{15}$$

constituem uma base do espaço das soluções complexas de (10). Temos então que as soluções *reais* de (10) são precisamente as combinações lineares das funções (15) com coeficientes *reais*, i.e., a solução geral *real* de (15) é:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1 e^{2t}(2, -3, 2) &+ c_2 e^{3t}(0, -\cos t - \operatorname{sen} t, 2\cos t) \\ &+ c_3 e^{3t}(0, \cos t - \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Temos que as funções (15) constituem uma base do espaço das soluções reais de (10).

7. **Exemplo.** Vamos achar as soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_3(t), \\ x_2'(t) = 2x_2(t) - x_4(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) + 2x_3(t), \\ x_4'(t) = x_2(t) + 2x_4(t). \end{cases} \tag{16}$$

A matriz de coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2 = (2 + i - \lambda)^2 (2 - i - \lambda)^2,$$

e seus autovalores são $2+i$ e $2-i$. Se $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ denota o operador linear que é representado pela matriz A na base canônica de $\mathbb{C}^4$ então um cálculo simples mostra que:

$$\operatorname{Ker}\big(T - (2+i)\mathrm{I}\big) = [(i, 0, 1, 0), (0, i, 0, 1)].$$

Daí:

$$\operatorname{Ker}\big(T - (2-i)\mathrm{I}\big) = [(-i, 0, 1, 0), (0, -i, 0, 1)].$$

Temos então que as funções:

$$e^{(2+i)t}(i, 0, 1, 0), \quad e^{(2+i)t}(0, i, 0, 1),$$

juntamente com suas conjugadas:

$$e^{(2-i)t}(-i, 0, 1, 0), \quad e^{(2-i)t}(0, -i, 0, 1),$$

constituem uma base do espaço das soluções complexas de (16). Mas:

$$\begin{aligned} e^{(2+i)t}(i, 0, 1, 0) &= e^{2t}(\cos t + i \operatorname{sen} t)(i, 0, 1, 0) \\ &= e^{2t}(-\operatorname{sen} t, 0, \cos t, 0) + i e^{2t}(\cos t, 0, \operatorname{sen} t, 0), \\ e^{(2+i)t}(0, i, 0, 1) &= e^{2t}(\cos t + i \operatorname{sen} t)(0, i, 0, 1) \\ &= e^{2t}(0, -\operatorname{sen} t, 0, \cos t) + i e^{2t}(0, \cos t, 0, \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Temos então que a solução geral *real* de (16) é:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1 e^{2t}(-\operatorname{sen} t, 0, \cos t, 0) &+ c_2 e^{2t}(\cos t, 0, \operatorname{sen} t, 0) \\ &+ c_3 e^{2t}(0, -\operatorname{sen} t, 0, \cos t) + c_4 e^{2t}(0, \cos t, 0, \operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Apêndice A. Derivada de uma função complexa

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{C}$ é uma função complexa de variável real então sua derivada $f' : I \to \mathbb{C}$ (quando existe) é definida por:

$$f' = f_1' + i f_2',$$

onde $f = f_1 + i f_2$, $f_1 : I \to \mathbb{R}$, $f_2 : I \to \mathbb{R}$. Um cálculo simples mostra que se $f : I \to \mathbb{C}$, $g : I \to \mathbb{C}$ são funções deriváveis então valem as regras usuais:

$$(f+g)' = f' + g', \tag{17}$$

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{18}$$

Provemos, por exemplo, a fórmula (18). Se $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ então:

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1),$$

donde:

$$\begin{aligned}(fg)' &= (f_1g_1 - f_2g_2)' + i(f_1g_2 + f_2g_1)' \\ &= (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1');\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}f'g + fg' &= (f_1' + if_2')(g_1 + ig_2) + (f_1 + if_2)(g_1' + ig_2') \\ &= (f_1'g_1 - f_2'g_2 + f_1g_1' - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_2'g_1 + f_1g_2' + f_2g_1') \\ &= (fg)'.\end{aligned}$$

Apêndice B. A exponencial complexa

Dado um número complexo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definimos[5]:

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{19}$$

Note que se z é real (i.e., se $y = 0$) então esse novo significado para e^z coincide com o significado usual, já que $z = x$ e $\cos y + i \operatorname{sen} y = 1$. Um cálculo simples usando as fórmulas usuais para $\cos(y_1 + y_2)$ e $\operatorname{sen}(y_1 + y_2)$ mostra que:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$$

para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Em particular, vale que:

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, donde $e^z \neq 0$ e:

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Note que o conjugado de e^z é dado por:

$$\overline{e^z} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

Fixado um número complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(t) = e^{zt} = e^{xt}\big(\cos(yt) + i \operatorname{sen}(yt)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

é derivável e um cálculo simples mostra que sua derivada é dada por:

$$f'(t) = ze^{zt}.$$

Além do mais, a solução geral complexa da equação diferencial:

$$f'(t) = zf(t), \tag{20}$$

[5]Essa definição aparentemente artificial torna-se natural quando consideramos a *série de Taylor* da exponencial. Para $z \in \mathbb{R}$, demonstra-se que e^z é dada pela soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. A definição (19) faz com que a igualdade $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ continue verdadeira para z complexo.

é:

$$f(t) = ce^{zt}, \tag{21}$$

com $c \in \mathbb{C}$ uma constante complexa arbitrária. De fato, temos que (21) é uma solução de (20) e se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma solução de (20) então:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(t)e^{-zt}\big) = f'(t)e^{-zt} - zf(t)e^{-zt} = e^{-zt}\big(f'(t) - zf(t)\big) = 0,$$

donde existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(t)e^{-zt} = c$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, f é dada por (21).