INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2458 — ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II
PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DA DISCIPLINA

EXERCÍCIOS

1. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $S_1 = [(1,0,-1),(1,2,1)]$ e $S_2 = [(1,1,1),(1,0,0)]$.
a. Determine $S_1 + S_2$.
b. Ache uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

2. Os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3,2}(R)$ são dados por

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \\ c & a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad S_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \right].$$

Ache uma base e a dimensão dos subespaços S_1, S_2, $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão 5. Sejam S_1 e S_2 subespaços de V de dimensão 3. Prove que $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$.

4. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y + z = t\}, \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\}.$$

Determine as dimensões de $U + W$ e $U \cap W$.

5. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}, \quad W = \{(x,-x,x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:
a. $\dim(U + W) = 3$;
b. $\dim(W) = 1$;
c. o conjunto $U \cup W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
d. $\dim(U) = 2$;
e. $\dim(U \cap W) = 0$.

6. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 7, S_1 e S_2 subespaços de V tais que $V = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. Pode-se afirmar que:
a. $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$.
b. $\dim(S_1 \cap S_2)$ é ímpar.
c. $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 3$.
d. $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 5$.
e. $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$.

7. Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial E, B_1 é uma base de S_1 e B_2 é uma base de S_2 então a respeito de $B = B_1 \cup B_2$ pode-se afirmar que:
a. é um conjunto linearmente independente, mas pode não gerar $S_1 + S_2$.
b. é um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$, mas pode não ser linearmente independente.
c. é uma base de $S_1 + S_2$.
d. não é uma base de $S_1 + S_2$.
e. pode não ser nem linearmente independente, nem um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$.

8. Seja $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) + p(1) = 0\}$.
a. Mostre que S é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$.
b. Determine um subespaço W de $P_3(\mathbb{R})$ tal que $S \oplus W = P_3(\mathbb{R})$.

9. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ como espaço vetorial.
a. Mostre que são subespaços de V os subconjuntos:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{A \in V : A = -A^t\}.$$

b. Prove que $M_2(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$.
c. Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{A = (a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\} \quad \text{e} \quad T = \{B = (b_{ij}) \in V : b_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}.$$

Ache as dimensões de $U, T, U + T$ e de $U \cap T$.

10. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

11. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Ache todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

12. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V:

(A)	$\|u\| = \|v\|$;	(I)	$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$;
(B)	$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;	(II)	$\langle u + v, u - v \rangle = 0$;
(C)	$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$;	(III)	$\langle u, v \rangle = 0$.

Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:
a. (A) $\iff$ (III), (B) $\iff$ (II), (C) $\iff$ (I).
b. (A) $\iff$ (II), (B) $\iff$ (I), (C) $\iff$ (III).
c. (A) $\iff$ (I), (B) $\iff$ (III), (C) $\iff$ (II).
d. (A) $\iff$ (II), (B) $\iff$ (III), (C) $\iff$ (I).
e. (A) $\iff$ (I), (B) $\iff$ (II), (C) $\iff$ (III).

13. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:
a. $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx$;
b. $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

14. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a expressão:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos x - (ax + b)\big]^2\, dx$$

assume o seu valor mínimo. Assinale a alternativa correta:
a. $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$.
b. $a = b = 0$.
c. $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$.
d. $a = 0$ e $b = \pi$.
e. $a = \pi$ e $b = 0$.

15. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ considerando em $\mathcal{C}([0, 1])$ o produto interno usual, ou seja, o produto interno dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$.

16. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

a. Prove que $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\,(B^tA)$, onde X^t denota a transposta de uma matriz X e $\mathrm{Tr}\,(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal).
b. Se $W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix} \right) : x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W.
c. Se W é como em (b), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$.

17. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere o produto interno:
$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$
Calcule $\operatorname{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $\operatorname{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$.

18. Em $\mathcal{C}\big([0, 2\pi]\big)$ munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ considere o subespaço $S = [1, \operatorname{sen} x, \cos x]$. Calcule $\operatorname{proj}_S(x-2)$.

19. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E então:
$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n,$$
para todo $x \in E$;

(II) se $u, v \in E$ são linearmente independentes e se $w = v - \operatorname{proj}_u v$ então w é ortogonal a u se e somente se $\|u\| = 1$;

(III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é linearmente independente e se $z = w - \operatorname{proj}_u w - \operatorname{proj}_v w$ então z é ortogonal a u e a v.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
b. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
c. apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
e. nenhuma das afirmações é verdadeira.

20. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, S um subespaço de V e $u, v \in V$ tais que $v \in S^\perp$ e $u - v \in S$. Pode-se afirmar que:

a. $\langle u, v\rangle = 0$.
b. $u \in S^\perp$.
c. $u = 0$.
d. $\langle u, v\rangle = \|v\|^2$.
e. $\langle u, v\rangle = \|u\|$.

21. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico e seja
$$S = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\big\}.$$
(a) Determine uma base ortonormal de S.
(b) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.

22. Considere em $P_3(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Seja
$$S = \big\{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\big\}.$$
(a) Determine uma base ortonormal de S.
(b) Dado $p \in P_3(\mathbb{R})$ encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^\perp$ tais que $p = p_1 + p_2$.

23. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno canônico) para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2,4)$ e $v_3 = (1,2,-4,-3)$.

24. Considere em $P(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

a. Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.
b. Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.

25. Considere a função definida por
$$\big\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\big\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$
para todos $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

a. Mostre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.
b. Encontre uma base de $S^\perp$, onde $S = [(1, 2, 0, -1)]$.

26. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, S um subespaço de E, B um subconjunto de S e C um subconjunto de $S^{\perp}$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

a. se B ẃ uma base de S e C é uma base de $S^{\perp}$ então $B \cup C$ é uma base de E.
b. $B \cap C \subset \{0\}$.
c. se B e C são linearmente independentes então $B \cup C$ é linearmente independente.
d. se B é uma base de S e C é uma base de $S^{\perp}$ então $B \cup C$ gera E, mas pode não ser linearmente independente.
e. se B gera S e C gera $S^{\perp}$ então $B \cup C$ gera E.

27. Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:

(I) $(S+T)^{\perp} \subset S^{\perp} \cap T^{\perp}$;
(II) Se E tem dimensão finita, então $\dim \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \dim S$;
(III) $S^{\perp} + T^{\perp} \subset (S \cap T)^{\perp}$.

Podemos afirmar que:

a. As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita.
b. As três afirmações são falsas.
c. Apenas as afirmaç oes (I) e (III) são verdadeiras.
d. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
e. As três afirmações são verdadeiras.

28. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear:

a. $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(a)$, para toda f em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde a é um número real fixado.
b. $T : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$.
c. $T : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = af'' + bf' + cf$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$, onde a, b e c são números reais fixados.
d. $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para toda f em $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado.

29. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal, isto é, se $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$, então $\operatorname{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

a. Mostre que a função $\operatorname{Tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear.
b. Mostre que $\dim \operatorname{Ker}(T) = n^2 - 1$.
c. Mostre que $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^t$, onde A^t denota a transposta da matriz A.

30. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $S \subset E$ um subespaço de E. Seja $T \colon E \to E$ a transformação definida por $T(u) = \operatorname{proj}_S u$, para todo $u \in E$. Considere as afirmações:

(I) $\operatorname{Ker}(T) = S^{\perp}$ e $\operatorname{Im}(T) = S$;
(II) Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de S e $u \in E$, então

$$T(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k;$$

(III) $T(u) = u$ se, e somente se, $u \in S$.

Podemos afirmar que:

a. Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
b. Todas as afirmações são verdadeiras.
c. Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
d. Apenas a afirmação (II) é falsa.
e. Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

31. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = AM - MA$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que T é linear e determine seu núcleo. A matriz identidade pertence à imagem de T?

32. Ache uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Im}(T)$ seja gerada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ache uma base para $\operatorname{Im}(T)$ e uma base para $\operatorname{Ker}(T)$.

33. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(X) = AX$, $X \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ b & 0 & 2b & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:
a. T não é injetora.
b. se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$ então T é injetora.
c. T é bijetora se e somente se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$.
d. T não é sobrejetora.
e. se $a \neq 1$, $b \neq 0$ e $a + c \neq 2$ então T não é bijetora.

34. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.
a. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é linear.
b. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é linear.
c. $T : P_n(R) \to \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_n$ é linear.
d. Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}^5$.
e. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ e $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$, então T é sobrejetora.
f. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\operatorname{Im}(T) = \{0\}$, então $T(x) = 0$, para todo $x \in V$.
g. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.
h. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

35. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e cuja imagem seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

36. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e como imagem a reta $[(1, 0)]$.

37. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

38. Considere o operador linear $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por $T(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o núcleo e a imagem desse operador.

39. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.
a. Existe uma transformação linear inversível $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.
b. Se $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então T é sobrejetora.
c. Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$.
d. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.
e. Existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

40. Em cada um dos casos abaixo, encontre números reais a, b, c, d de modo que o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$:
(a) tenha como núcleo a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$;
(b) tenha como imagem a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

41. Seja W um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um espaço vetorial V e um isomorfismo $T : V \to W$ defina

$$\langle\!\langle v_1, v_2 \rangle\!\rangle = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle \text{ para todos } v_1, v_2 \in V.$$

Mostre que $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ é um produto interno em V.

42. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.

a. Uma transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora se, e somente se, $\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim(U) - \dim(V)$.

b. Dada uma transformação linear $T : U \to V$ e um vetor $v \in V$ então o conjunto $G = \{x \in U : T(x) = v\}$ é um subespaço de U.

c. O núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

d. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for injetora, então $\dim \operatorname{Im}(T) = m$.

e. Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetora, então $\dim \operatorname{Ker}(T) = m - n$.

43. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Prove que $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$ se, e somente se, $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.

44. Sejam E um espaço vetorial de dimensão 2 e $T\colon E \to E$ um operador linear não nulo tal que $T \circ T = 0$. Considere as afirmações:

(I) $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Ker}(T)$;

(II) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$;

(III) $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$.

Podemos afirmar que:

a. Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

b. Apenas a afirmação (II) é falsa.

c. Apenas a afirmação (III) é falsa.

d. Todas as afirmações são falsas.

e. Todas as afirmações são verdadeiras.

45. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que T e T^2 tenham o mesmo posto. (Recorde que o *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem.) Prove que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$. Vale a recíproca?

46. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

a. Existe uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação às bases canônicas é a matriz identidade.

b. Se $T : P_8(\mathbb{R}) \to P_8(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então existe uma base de $P_8(\mathbb{R})$ tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

c. Se $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear injetora então para qualquer base de $\mathbb{R}^3$ a matriz de T em relação a esta base é inversível.

d. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, existe uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

47. Determine a matriz do *operador derivação* $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, relativamente à base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $P_4(\mathbb{R})$.

48. Considere os subespaços vetoriais U e V de $C^\infty(\mathbb{R})$ cujas bases são respectivamente $B = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ e $C = \{e^x \cos x, e^x \operatorname{sen} x, e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$. Determine as matrizes dos *operadores de derivação* $f \in U \mapsto f' \in U$ e $f \in V \mapsto f' \in V$ com respeito às bases B e C, respectivamente.

49. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(2,3) = (2,3)$ e $T(-3,2) = (0,0)$?

50. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(-1,1),(0,1)\}$ é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $T(x,y) = (x, 3x+y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

(II) a imagem pela transformação T da parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ é a parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$;

(III) o vetor $(2,3)$ pertence à imagem de T.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
b. apenas a afirmação (I) é verdadeira;
c. todas as afirmações são verdadeiras;
d. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
e. todas as afirmações são falsas.

51. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Obtenha números reais a, b, c de modo que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

52. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n(\mathbb{R})$ e $S : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por $T(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $S(p) = \big(p(0), p(1), \ldots, p(n)\big)$. Determine as matrizes de $S \circ T$ e de $T \circ S$ com respeito às bases canônicas apropriadas.

53. Se $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é a transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{1, 1+t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$ e $C = \{2+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

então $T(1+2t)$ é igual a:

a. $1 + 7t^2$;
b. $3 + 4t - 2t^2$;
c. $5 + 4t - t^2$;
d. $-1 + 4t + 5t^2$;
e. $9 - 6t^2$.

54. Sejam F e G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e tais que a matriz do operador $2F - G$ em relação à base $B = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito às bases B e $C = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$.

55. Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ e considere o operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definido por $T(A) = BA$, para todo $A \in M_2(\mathbb{R})$. Ache a matriz do operador $S = T^2 - T$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

1. **a.** $\mathbb{R}^3$;
   b. dimensão 1, base $\{(0,1,1)\}$.
2. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
   é uma base de S_1, $\dim S_1 = 3$.
   $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$
   é uma base de S_2, $\dim S_2 = 3$.
   $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 + S_2$, $\dim S_1 + S_2 = 5$.
   $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 \cap S_1$, $\dim S_1 \cap S_2 = 1$.
3. $\dim S_1 \cap S_2 \geq 1$.
4. $\dim(U + W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

8. Por exemplo, $W = [x^2]$.
9. Dimensões: $3, 3, 4, 2$.
10. $t > 0$.
11. $\{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$; $\|(1,0)\| = \sqrt{2}$.
13. **a.** não existe λ; **b.** $\lambda = \frac{2}{3}$.
15. $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105)$.
16. **b.** Uma possível base é
    $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
    c. $\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
17. $\frac{1}{5}(14x + 3)$.
18. $\pi - 2 - 2\operatorname{sen} x$.
21. **a.** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1,2,6,-1)$.
    b. Se $v = (x,y,z,w)$ então,
    $v_1 = \frac{1}{7}(6x + 2y - z - w,$
    $2x + 3y + 2z + 2w,$
    $-x + 2y + 6z - w,$
    $-x + 2y - z + 6w)$
    e $v_2 = \frac{1}{7}(x - 2y + z + w,$
    $-2x + 4y - 2z - 2w,$
    $x - 2y + z + w,$
    $x - 2y + z + w)$.
22. **a.** $\{\sqrt{3}\,(x - 1), \sqrt{5}\,(4x^2 - 5x + 1), \sqrt{7}\,(15x^3 - 25x^2 + 11x - 1)\}$.
    b. Se $f = a + bx + cx^2 + dx^3$ então,
    $p_1 = \frac{1}{4}\big((5a + b + c + d) -$
    $(15a + 11b + 15c + 15d)x +$
    $(45a + 45b + 49c + 45d)x^2 -$
    $(35a + 35b + 35c + 31d)x^3\big)$ e
    $p_2 = \frac{1}{4}(a + b + c + d)(-1 + 15x -$
    $45x^2 + 35x^3)$.
23. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$.
24. **a.** $\{1, 2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\}$.
    b. $\{1, \sqrt{3}\,(2t - 1),$
    $\sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$.
25. **b.** Uma possível base é
    $\{(1,0,0,2), (0,1,0,2), (0,0,1,0)\}$.
28. Todas as transformações dadas são lineares.
31. $\operatorname{Ker} T = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ e $Id \notin \operatorname{Im}(T)$.
32. **a.** Defina, por exemplo,
    $T(a + bx + cx^2 + dx^3) =$
    $$\begin{pmatrix} a + 2b & b + 6c & a + 4b + 2c \\ 3b + c & a + 5b & a - 2b \\ 2a & -b & a - 3b - c \end{pmatrix}.$$
    b. Para o exemplo dado em a, uma base de $\operatorname{Ker}(T)$ é $\{x^3\}$. Uma base de $\operatorname{Im}(T)$ é constituida pelas matrizes dadas no enunciado do exercício.
34.

(a) Falsa	(b) Falsa
(c) Verdadeira	(d) Verdadeira
(e) Verdadeira	(f) Verdadeira
(g) Falsa	(h) Verdadeira

35. Defina, por exemplo,
    $T(x,y) = (x - y, 2x - 2y)$.
36. Defina, por exemplo,
    $T(x,y) = (y, 0)$.
37. Defina, por exemplo,
    $T(x,y,z,t) = (z,t,0,0)$. Assim,
    $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T) = [(1,0,0,0), (0,1,0,0)]$.
38. $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$;
    $\operatorname{Im}(T) = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}$.
39.

(a) Verdadeira	(b) Falsa
(c) Verdadeira	(d) Verdadeira
(e) Verdadeira	(f) Verdadeira

40. **a.** Tome, por exemplo, $a = -3$, $b = 1$, $c = -3$, $d = 1$.
    b. Tome, por exemplo, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$.

42.
(a) Verdadeira (b) Falsa
(c) Falsa (d) Verdadeira
(e) Verdadeira

46. **a.** Sim; **b.** Não; **c.** Não; **d.** Sim.

47. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

48. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

49. $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$.

51. Considere, por exemplo, $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

52. Ambas as matrizes são iguais a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$.

54. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & -10 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

55. Ordenando a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ como $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$, então a resposta é a matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{pmatrix}.$$

Múltipla Escolha:

Ex. 5. (c);	Ex. 6. (b);	Ex. 7. (b)
Ex. 12. (d);	Ex. 14. (a);	Ex. 19. (e)
Ex. 20. (d);	Ex. 26. (d);	Ex. 27. (e)
Ex. 30. (d);	Ex. 33. (b);	Ex. 44. (b)
Ex. 50. (a);	Ex. 53. (b).	