INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2458 — ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II
SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DA DISCIPLINA

EXERCÍCIOS

1. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

(a) Existe uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação às bases canônicas é a matriz identidade.

(b) Se $T : P_8(\mathbb{R}) \to P_8(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então existe uma base de $P_8(\mathbb{R})$ tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

(c) Se $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear injetora então para qualquer base de $\mathbb{R}^3$ a matriz de T em relação a esta base é inversível.

(d) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, existe uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

(e) Se B e C são bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são semelhantes.

2. Determine a matriz do *operador derivação* $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, relativamente à base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $P_4(\mathbb{R})$.

3. Considere os subespaços vetoriais U e V de $C^\infty(\mathbb{R})$ cujas bases são respectivamente $B = \{\cos x\,,\, \operatorname{sen} x\}$ e $C = \{e^x \cos x\,,\, e^x \operatorname{sen} x\,,\, e^{2x} \cos x\,,\, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$. Determine as matrizes dos *operadores de derivação* $f \in U \mapsto f' \in U$ e $f \in V \mapsto f' \in V$ com respeito às bases B e C, respectivamente.

4. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(2,3) = (2,3)$ e $T(-3,2) = (0,0)$?

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(-1,1), (0,1)\}$ é:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $T(x,y) = (x, 3x+y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

(II) a imagem pela transformação T da parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ é a parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$;

(III) o vetor $(2,3)$ pertence à imagem de T.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(c) todas as afirmações são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) todas as afirmações são falsas.

6. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Obtenha números reais a, b, c de modo que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

7. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ e $S : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por $T(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $S(p) = \big(p(0), p(1), \ldots, p(n)\big)$. Determine as matrizes de $S \circ T$ e de $T \circ S$ com respeito às bases canônicas apropriadas.

8. Se $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é a transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{1, 1+t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$ e $C = \{2+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{B,C}$$

então $T(1+2t)$ é igual a:
(a) $1+7t^2$;
(b) $3+4t-2t^2$;
(c) $5+4t-t^2$;
(d) $-1+4t+5t^2$;
(e) $9-6t^2$.

9. Sejam F, G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e tais que a matriz do operador $2F - G$ em relação à base $B = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ seja $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito às bases B e $C = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$.

10. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ e considere o operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definido por $T(A) = BA$, para todo $A \in M_2(\mathbb{R})$. Ache a matriz do operador $S = T^2 - T$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

11. Sejam $T, S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que

$$T(x,y,z) = (x+2y, y+2z, 3z), \quad x,y,z \in \mathbb{R}, \quad [S \circ T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz $[S]_{\text{can}}$ (ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de $[S]_{\text{can}}$) é igual a
(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4; (e) 5.

12. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ e $G : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde:

$$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\} \quad \text{e} \quad C = \{1, 1+x, x+x^2\}.$$

(a) Determine bases para $\text{Ker}\,(G \circ T)$ e $\text{Ker}\,(T \circ G)$.
(b) Seja $H = 3(T \circ G) + \text{I}$. Determine $[H]_{DC}$, onde $D = \{1, x, x^2\}$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T \colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:
(a) não existem a e b que tornem T injetora;
(b) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;
(c) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$;
(d) não existem $a, b \in \mathbb{R}$ que tornem T sobrejetora;
(e) T é bijetora se $a = b$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $T^2 = T$. Prove que $T = 0$ *ou* $T = \mathrm{I}$ *ou* existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear não nulo tal que $T^2 = 0$. Prove que existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (-y, x - y, z, -w)$. Mostre que $T^6 = \mathrm{I}$ e determine T^{-1}.

17. Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$ então seu polinômio característico é dado por

$$p_A(t) = t^2 - a_1 t + a_0$$

onde $a_0 = \det(A)$ e $a_1 = \text{traço}(A)$.

18. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m, $m \geq 1$.

19. Exiba uma matriz A *não diagonalizável* tal que a matriz A^2 seja *diagonalizável.*
Sugestão: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

20. Mostre que o operador linear $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dado por

$$T(u(x)) = \int_0^x u(s)ds$$

não tem autovalores.

21. Seja T um operador linear com autovalores 0, 1, 2 e 3. Assinale a alternativa contendo uma afirmação FALSA:
(a) 5, 6, 9 e 14 são autovalores de $5\,\mathrm{I} + T^2$;
(b) T é inversível e 0, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são autovalores de T^{-1};
(c) 0, 1, 4 e 9 são autovalores de T^2;
(d) 0, 1, 8 e 27 são autovalores de T^3;
(e) 0, 3, 6 e 9 são autovalores de $3T$.

22. Mostre que se λ é um autovalor do operador linear $T : V \to V$ e n é um número natural, então:
(a) λ^n é um autovalor de T^n.
(b) Se $f(t)$ é um polinômio qualquer então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

23. Sejam V um espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear, u um autovetor de T associado ao autovalor λ e v um autovetor de T associado ao autovalor μ. Pode-se afirmar que:
(a) $u + v$ é autovetor de T se e somente se $\mu = \lambda$ e $u + v \neq 0$;
(b) se $\lambda = \mu$ então $\lambda u + v$ não é um autovetor de T;
(c) se $\lambda \neq \mu$ então u e v podem ser linearmente dependentes;
(d) se $\lambda \neq \mu$ então, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, $3u + \beta v$ é autovetor de T associado ao autovalor $3\lambda + \beta\mu$;
(e) se $\lambda = \mu$ então $u - v$ é autovetor de T associado ao autovalor 0.

24. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear invertível. Prove que:
(a) Se λ é um valor próprio de T então $\lambda \neq 0$.
(b) λ é um valor próprio de T se, e somente se $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de T^{-1}(onde T^{-1} é o operador inverso de T).

(c) Se λ é um valor próprio de T, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

25. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$. Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$.
Sugestão: Lembre-se de que $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

26. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5, 1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

27. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

28. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável. Quando for diagonalizável, determine uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

29. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde $n \geq 2$. Assuma que a soma dos elementos de qualquer linha de A seja igual a 1. Assinale a alternativa correta:
(a) A pode não possuir autovalores reais;
(b) 1 e 0 são necessariamente autovalores de A;
(c) A possui algum autovalor real, mas pode ser que nem 1 nem 0 sejam autovalores de A;
(d) 1 é necessariamente autovalor de A, mas 0 pode não ser;
(e) 0 é necessariamente autovalor de A, mas 1 pode não ser.

30. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0), (1,1,0), (1,0,1)\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{B,C}.$$

a. Encontre os autovalores e autovetores de T.
b. É T diagonalizável?

31. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine *todos* os valores de a, b, e c para os quais A é diagonalizável.

32. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3, $T : V \to V$ um operador linear e B uma base de V tal que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ -3a & c & a \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:
(a) se $b \neq a = 0$ então T não é diagonalizável;
(b) se $|b| \neq 2|a|$ e $a \neq 0$ então T é diagonalizável;
(c) se $a \neq 0$ e $b = 2a = c$ então T é diagonalizável;
(d) se $a = b = 0$ e $c \neq 0$ então T é diagonalizável;
(e) se $c = 0$ e $b = -2a \neq 0$ então T não é diagonalizável.

33. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $p_T(t)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

(a) $p_T(t) = t^4 - 1$
(b) $p_T(t) = t^3(t+1)$, e $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$.
(c) $p_T(t) = t^2(t^2-4)$, e $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$.

34. Sejam U um espaço vetorial de dimensão 5, $T\colon U \to U$ um operador linear e $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$ seu polinômio característico. Assinale a alternativa VERDADEIRA:
(a) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) \geq 2$;
(b) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$, $\dim(\operatorname{Ker}(T+2\mathrm{I})) = 1$ e $\dim(\operatorname{Ker}(T+\mathrm{I})) = 3$;
(c) T é sobrejetor;
(d) T não é diagonalizável pois $\dim(U) = 5$ e p possui apenas três raízes reais;
(e) [(a)] T é diagonalizável se, e somente se, existem $v_1, v_2, v_3 \in U$, linearmente independentes, tais que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -v_2$ e $T(v_3) = -v_3$.

35. Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n > 4$, $T\colon V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (1-t)(2-t)^3(3-t)^{n-4}$. Assinale a alternativa FALSA: O operador T é diagonalizável se, e somente se,
(a) $\dim(\operatorname{Im}(T-3\mathrm{I})) - \dim(\operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I})) = 1$;
(b) $V = \operatorname{Ker}(T-\mathrm{I}) + \operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I}) + \operatorname{Ker}(T-3\mathrm{I})$;
(c) $\dim(\operatorname{Im}(T-\mathrm{I})) + \dim(\operatorname{Im}(T-2\mathrm{I})) + \dim(\operatorname{Im}(T-3\mathrm{I})) = n$;
(d) $\dim(\operatorname{Ker}(T-\mathrm{I})) + \dim(\operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I})) + \dim(\operatorname{Ker}(T-3\mathrm{I})) = n$;
(e) $\dim(\operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I})) + \dim(\operatorname{Ker}(T-3\mathrm{I})) = n-1$.

36. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que todo vetor não nulo é um autovetor de T. Escreva então $Te_i = \alpha_i e_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1,2,3$ e $\mathrm{can} = \{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.
(a) Calcule $T(e_1 + e_2 + e_3)$.
(b) Mostre que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.
(c) Prove que existe um número $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio característico de T seja

$$p_T(t) = (t-\alpha)^3.$$

(d) Conclua que $T = \alpha\,\mathrm{I}$ onde I é o operador identidade.

37. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que $\lambda \neq \mu$ sejam autovalores de T. Considere as seguintes afirmações:
(I) se $\dim(V) - \dim\big(V(\lambda)\big) = 1$ então T é diagonalizável;
(II) se $\dim(V) = \dim\big(V(\lambda)\big) + \dim\big(V(\mu)\big)$ então T é diagonalizável;
(III) T é diagonalizável se e somente se $\dim(V) = 2$.
Assinale a alternativa correta:
(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

38. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que posto(T) = 1. Prove que *ou* T é diagonalizável *ou* T^2 é o operador nulo.

39. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T$.
(a) Prove que se λ é um autovalor de T então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
(b) Prove que $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$ e conclua que T é diagonalizável.

40. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ o operador linear tal que $T(M) = M^t$, onde $M \in M_n(\mathbb{R})$ e M^t é a transposta de M. Prove que T é diagonalizável.

41. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definida por $T(f(t)) = f(t+1)$ para todo $f(t) \in P_n(\mathbb{R})$. É T diagonalizável? Por que?

42. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $T : V \to V$ o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os subespaços $[v_1, v_2]$ e $[v_3, v_4]$ são invariantes sob T.
(b) Verifique que T não tem autovetores.

43. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de um espaço vetorial V e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:
(I) o subespaço $[e_1, e_2, e_4]$ é invariante por T;
(II) o subespaço $[e_2, e_4]$ é invariante por T;
(III) o subespaço $[e_1, e_3]$ é invariante por T.
Assinale a alternativa correta:
(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

44. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual considere o subespaço $W = [(1, 1, 0, 0,), (0, 1, -1, 1)]$.
(a) Determine bases ortonomais B e B' para W e $W^\perp$ respectivamente.
(b) Sendo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por $T(v) = \text{proj}_W(v)$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup B'$.
(c) Quais são os autovalores de T? É T diagonalizável?

45. Sejam T um operador simétrico num espaço vetorial de dimensão finita V com produto interno e λ um valor próprio de T. Mostre que o subespaço $(V(\lambda)^\perp)$ é invariante por T.

46. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:
(I) os únicos valores próprios de T são 2 e -2;
(II) T é simétrico;
(III) $V(2) = [(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1)]$.
Temos que $T(3, -2, 2, 3)$ é igual a:
(a) $(6, 4, 4, 6)$;
(b) $(-4, 6, 6, -4)$;
(c) $(6, 4, -4, 6)$;
(d) $(-6, -4, 4, 6)$;
(e) $(4, 6, 6, 4)$.

47. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z) \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:
(a) T é simétrico;
(b) o polinômino característico de T possui uma única raiz real;
(c) T não é injetor;
(d) T possui três valores próprios distintos;
(e) T possui dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 tais que $\dim V(\lambda_1) = 1$ e $\dim V(\lambda_2) = 1$.

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}$.
6. A resposta não é única. Considere, por exemplo, $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.
7. Ambas as matrizes são iguais a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix}$.
9. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & -10 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.
10. Ordenando a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ como $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \}$, a resposta é a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{bmatrix}$.

    (b) $[H]_{DC} = \begin{bmatrix} 13 & -19 & 19 \\ 6 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.
25. $\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 12 + 14^n & -4 + 4 \times 14^n \\ -3 + 3 \times 14^n & 1 + 12 \times 14^n \end{bmatrix}$
26. $(2^{-9} + 3 \times 2^{10}, -2^{-9} + 3 \times 2^{10})$
27. As respostas vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
28. (a) É diagonalizável. As respostas para M vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b)Não é diagonalizável. (c)Não é diagonalizável.

    (d)É diagonalizável. As respostas para M vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
30. (a)autovalores:-1 e 3;$V(-1) = [(1,1,0),(1,1,1)]$ e $V(3) = [(-1,1,0)]$. (b) Sim.
31. Se a, c e 1 são distintos e b é qualquer; se $a = c \neq 1$ e $b = 0$; se $a \neq 1$ e $c = 1$ e b é qualquer.
33. (a)Não. (b) Não. (c) Sim.
44. (a) $B = \{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}) \}$ e $B' = \{ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}) \}$

    (b)$[T]_{B \cup B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Respostas dos testes:

5. (a). 8. (b). 11. (a). 13. (c). 21. (b). 23. (a). 29. (d). 32. (b). 34. (e). 35. (c). 37. (a). 43. (c). 46. (c). 47. (a).