INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2458 — ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II
TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DA DISCIPLINA

EXERCÍCIOS

1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico e seja λ um valor próprio de T. Prove que $V(\lambda)^{\perp}$ é T-invariante.

2. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:
(I) os únicos valores próprios de T são 2 e -2;
(II) T é simétrico;
(III) $V(2) = [(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1)]$.
Calcule $T(3,-2,2,3)$.

3. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde *can* é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.
a. Mostre que T é diagonalizável.
b. Ache uma base *ortonormal* B de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_B$ seja diagonal.
c. Ache uma matriz real invertível M tal que $M^{-1}[T]_{can}M$ seja diagonal.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x,y,z) = (4x + 2y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z).$$

a. Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de T.
b. Considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual mostre que *não existe* uma base *ortogonal* formada por vetores próprios de T. (Se ortogonalizarmos a base encontrada em (a) *não* obteremos uma base formada por *vetores próprios* de T. Por que?)

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cujos valores próprios são 2, -3 e 0 tais que $V(-3) = [(1,1,1)]$ e $V(2) = [(1,0-1)]$. Seja

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

tal que $M^{-1}[T]_{can}M$ (onde *can* indica a base canônica de $\mathbb{R}^3$) é diagonal.
a. Exiba $[T]_{can}$.
b. É T inversível? Justifique.
c. É $v = (1,-2,1)$ um vetor próprio de T? Justifique.

6. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x,y,z) = (x - 2y, -2x + y, -z).$$

a. Verifique que T é simétrico.
b. Determine uma matriz M tal que $M^{-1}[T]_{can}M$ seja diagonal.

7. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, determine uma base ortonormal B formada por vetores próprios do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é:

a. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $T\colon U \to U$ um operador linear e u e v vetores próprios de T associados respectivamente a valores próprios distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\dim(U) = 3$ e $\dim(V(\lambda)) = 2$ então T é diagonalizível;

(II) se T é simétrico então $V(\lambda) = V(\mu)^{\perp}$;

(III) se $\langle u, v \rangle = 0$ então T é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

a. somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
b. todas as afirmações sã o verdadeiras;
c. somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
d. somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
e. somente a afirmação (I) é verdadeira.

9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno canônico. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ é:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T não é simétrico, mas é diagonalizável;

(II) T é simétrico;

(III) T não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas a afirmação (III) é verdadeira;
b. apenas a afirmação (II) é verdadeira;
c. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
d. todas as afirmações são falsas;
e. apenas a afirmação (I) é verdadeira.

10. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3. Sendo $V(-2) = \operatorname{Ker}(T + 2I) = [(1,1,1), (-1,0,1)]$, ache $[T]_{can}$, onde *can* é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

11. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T então T é simétrico;

(II) se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ então u é ortogonal a v;

(III) T é simétrico se e somente se T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
b. apenas a afirmação (III) é verdadeira;
c. apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
d. apenas a afirmação (I) é verdadeira;
e. apenas a afirmação (II) é verdadeira.

12. Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) se B é uma base ortogonal de E então a matriz $[T]_B$ é simétrica;

(II) se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T, A_1 e A_2 são conjuntos ortogonais de vetores de E tais que $A_1 \subset \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 \mathrm{I})$ e $A_2 \subset \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 \mathrm{I})$, então a união $A_1 \cup A_2$ é um conjunto ortogonal;

(III) se B é uma base de E tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal então B é ortonormal.

Assinale a alternativa correta:

a. todas as afirmações são verdadeiras;
b. apenas a afirmação (II) é verdadeira;
c. apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
d. apenas a afirmação (I) é verdadeira;
e. apenas a afirmação (III) é verdadeira.

13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = \operatorname{proj}_W(v)$, a projeção ortogonal de v em W.

a. Prove que $T^2 = T$.
b. Prove que $\operatorname{Ker} T = W^\perp$ e $\operatorname{Im} T = W$.
c. Prove que existe uma base *ortonormal* B de V tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,
onde o número de $1's$ na diagonal é igual à dimensão de W.
d. Prove que T é um operador simétrico.

14. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja $S \neq V$ um subespaço de V e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico. Considere a afirmação abaixo:

"Se S é __(i)__ então $S^\perp$ é __(ii)__".

A substituição de (i) e (ii), respectivamente, pelas expressões abaixo que forma uma afirmação FALSA é:

a. "invariante por T", "autoespaço de T";
b. "a imagem de T", "autoespaço de T";
c. "a imagem de T", "o núcleo de T";
d. "autoespaço de T", "invariante por T";
e. "o núcleo de T", "a imagem de T";

15. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e sejam $u, w \in V$ vetores não nulos. Defina $T : V \to V$ por $T(v) = \langle v, u \rangle w$ para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se u e w são vetores linearmente dependentes.

16. Reconheça as seguintes cônicas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a. $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$;
b. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$;
c. $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$;
d. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

17. Reconheça as seguintes quádricas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

a. $2xy + z = 0$;
b. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0$;
c. $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$.
d. $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$.

18. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

onde a é um número real não nulo. Considere também as seguintes afirmações:

(I) se $0 < a < 1$ então a equação define uma hipérbole;

(II) se $a > 1$ então a equação define uma elipse;

(III) se $a = 1$ então a equação define um par de retas paralelas.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
b. todas as afirmações são verdadeiras;
c. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
d. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
e. todas as afirmações são falsas.

19. **a.** Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz. Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $y = 1$.

b. Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0, -1, -2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$.
Determine uma equação reduzida da superfície. Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $z = 0$.

c. Refaça o item anterior, considerando $Q = (0, -1, -1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$

20. Seja dado $k \in \mathbb{R}$. A equação $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k$, nas incógnitas x, y, z, não tem solução se:

a. $k = -11$; **b.** $k = -11$; **c.** $k = 11$; **d.** $k = 22$; **e.** $k = -22$.

21. **a.** Verifique que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + z, y, -x + y + z)$ não é diagonalizável.

b. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o operador linear dado por $T(x, y, z) = (x + z, y, -x + y + z)$.

(i) Verifique que T é diagonalizável e determine uma base B de $\mathbb{C}^3$ formada por autovetores de T.

(ii) Determine uma matriz invertível $M \in M_3(\mathbb{C})$ e uma matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{C})$ tais que $M^{-1}[T]_{can}M = D$, onde *can* é a base canônica de $\mathbb{C}^3$.

22. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz complexa arbitrária e se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A então o conjugado $\bar{\lambda}$ é necessariamente um autovalor de A;

(II) se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear e se existe uma base B de $\mathbb{C}^n$ tal que a matriz $[T]_B$ seja real então pode-se concluir que, para todo autovalor λ de T, o conjugado $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de T que possui a mesma multiplicidade algébrica que λ;

(III) se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear que é representado por uma matriz real na base canônica de $\mathbb{C}^n$ então *todo* elemento de Ker (T) está em $\mathbb{R}^n$.

Assinale a alternativa correta:

a. nenhuma das alternativas é verdadeira;
b. apenas a afirmação (II) é verdadeira;
c. apenas a afirmação (I) é verdadeira;
d. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
e. apenas a afirmação (III) é verdadeira.

23. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, e determine uma matriz invertível M e uma matriz diagonal D tais que $M^{-1}AM = D$.

24. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ cuja matriz em relação à base canônica é A. Denote por p_T o polinômio característico de T. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são tais que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$ então $\{v_1, \ldots, v_k\}$ também é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$;

(II) se $\alpha \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T e $\alpha \notin \mathbb{R}$ então existe $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo tal que $T(v) = \alpha v$;

(III) dado $\alpha \in \mathbb{C}$, então α é raiz de p_T se e somente se seu complexo conjugado $\bar{\alpha}$ for raiz de p_T.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas a afirmação (II) é verdadeira;
b. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
c. apenas a afirmação (I) é verdadeira;
d. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
e. apenas a afirmação (III) é verdadeira.

25. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

a. $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **c.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

26. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

a. a matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a \neq 1$ e $c = 0$;
b. a matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a \neq 1$ e $b = 0$;
c. para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, a matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;
d. a matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a \neq 0$;
e. para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, a matriz A não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

27. Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear com polinômio característico $f(x)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

a. $f(x) = x^4 - 1$
b. $f(x) = x^2(x^2 + 1)$ e $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$
c. $f(x) = (x^2 + 1)^2$

28. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, onde $n \geq 2$. Denote por p_A o polinômio característico de A. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**.

a. se $A \in M_n(\mathbb{R})$ então o número de autovalores complexos não reais distintos de A é par;
b. A pode ter um número ímpar de autovalores complexos não reais distintos;
c. se p_A tem coeficientes reais e $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de A então $\bar{\lambda}$ também é autovalor de A;
d. se p_A tem coeficientes reais e $u, v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $w = u + iv$ é autovetor de A então $\overline{w} = u - iv$ também é autovetor de A;
e. p_A pode ter coeficientes reais mesmo que $A \notin M_n(\mathbb{R})$;

29. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear tal que $[T]_{can} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo-se que T possui 3 autovalores distintos e que $(1, 2, 3)$ é um autovetor de T, qual dos seguintes vetores de $\mathbb{C}^3$ **não** pode ser autovetor de T?

a. $(1, 2, 3) + i(2, 4, 6)$;
b. $i(1, 2, 3)$;
c. $(2, 4, 6) + i(1, 1, 1)$;
d. $(1, 2, 3) + 4(5, 6, 7)$;
e. $(1, 1, 1) + i(2, 2, 2)$;

30. Sejam n um inteiro maior do que 1 e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real. Considere as seguintes afirmações:
(I) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;
(II) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
(III) todas as raizes complexas do polinômio característico de A são reais.
Assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**.
a. (I) não implica (III);
b. (II) implica (III);
c. (III) implica (I);
d. (II) implica (I);
e. assumindo-se (I) e (III), conclui-se (II);

31. Consideremos $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{C}$ tem dimensão 2 e uma base de $\mathbb{C}$ é $B = \{1, i\}$. Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o operador linear dado por $P(z) = iz$.
a. Verifique que $[P]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
b. Calcule $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{102}$.

32. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ o operador linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é A. Se i é um autovalor de T e $(-i, 1-i, 1, 0)$ e $(0, 1+i, 0, 2)$ são autovetores de T associados a i então:
a. $A^{15} = 0$;
b. $A^{15} = A$;
c. $A^{15} = \mathrm{I}$;
d. $A^{15} = -A$;
e. $A^{15} = -\mathrm{I}$;

33. Seja $A = \begin{bmatrix} 1+3i & -2i \\ 4i & 1-3i \end{bmatrix}$. Calcule A^{202}.

34. O objetivo do exercício é de determinar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f + f' = \operatorname{sen} x + e^x$.
a. Seja $F = \{\cos x, \operatorname{sen} x, e^x\}$. Mostre que F é linearmente independente em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
b. Seja V o subespaço gerado por F. Mostre que $T : V \to V$ definidada por $T(f) = f + f'$ é linear.
c. Escreva a matriz A de T na base F e as coordenadas na base F da função g definida por $g(x) = \operatorname{sen} x + e^x$.
d. Determine a matriz A^{-1}.
e. Ache f em V tal que $f + f' = \operatorname{sen} x + e^x$. Resolva a equação diferencial $y + y' = \operatorname{sen} x + e^x$.

35. Seja o sistema $X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} X$.
a. Determine a solução geral do sistema.
b. Determine a solução do sistema que verifica as condições iniciais $X(0) = (1, 1)$.

36. Determine todas as funções $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3)$ que verificam

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

37. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ tem autovalores $1,\ 2i,\ -2i$. Determine todas as soluções do sistema $X'(t) = AX(t)$.

38. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 243) Consideremos dois tanques: o tanque A contem inicialmente $100l$ de água e $15kg$ de sal; o tanque B contem inicialmente $100l$ de água e $5kg$ de sal. Um mecanismo permite a vazão do tanque A para o tanque B e vice-versa; a velocidade de vazão é constante e igual a $5l/min$. Suponhamos que, em cada instante t, as soluções nos tanques A e B estejam perfeitamente homogeneizadas, a quantidade de sal no tanque A é $x(t)$ e no tanque B é $y(t)$.

a. Mostre que $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} x' &= -0,05x + 0,05y \\ y' &= 0,05x - 0,05y \end{cases}, \text{ com } x(0) = 15 \text{ e } y(0) = 5.$$

Determine a solução deste sistema.

b. Após quantos minutos haverá 13 kg de sal no tanque A?

39. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t)$, em que:

$$\textbf{a. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b. } A = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 12 \\ -14 & 4 & 14 \\ -11 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

40. Ache a solução dos seguintes sistemas:

a. $\begin{cases} x' &= -3x + 4y \\ y' &= -x + 2y \end{cases}$, satisfazendo $x(0) = 2$ e $y(0) = 11$.

b. $\begin{cases} x' &= 2x + z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= x - y + 3z \end{cases}$, satisfazendo $x(0) = 1$, $y(0) = -3$ e $z(0) = -2$.

41. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 255) Consideremos o *sistema não-homogêneo*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

a. Determine uma solução constante, $X_0(t) = X_0 = (a, b)$ do sistema (0.1).

b. Determine a solução geral $Z(t)$ do *sistema homogêneo associado*,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

c. Verifique que a solução geral do sistema (0.1) é dada por $X(t) = X_0(t) + Z(t)$.

d. Encontre a solução do sistema (0.1) satisfazendo $x(0) = 37$ e $y(0) = \frac{41}{3}$ como condições iniciais.

RESPOSTAS

2. $T(3, -2, 2, 3) = (6, 4, -4, 6)$.

3. **b.** $\{(1,0,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}), (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$
c. Use, por exemplo, **b.** para construir uma tal matriz M.

4. **a.** $\{(1, 0, -3), (0, -1, 1), (1, 1, 2)\}$.

5. **a.** $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **b.** Não; **c.** Sim.

6. **b.** Uma tal matriz M é $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. **a.** $\{(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\}$;
b. $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})\}$.

10. $[T]_{can} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$

16. **a.** elipse; **b.** parábola; **c.** hipérbole; **d.** duas retas concorrentes.

17. **a.** parabolóide hiperbólico; **b.** parabolóide hiperbólico; **c.** hiperbolóide de uma folha; **d.** elipsóide.

19. **a.** É um cone. Equação: $z^2 = x^2 + y^2$. A curva é uma hipérbole com equação $z^2 - x^2 = 1$; **b.** É um cone. Equação: $5x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz - 10y - 20z = 25$. Equação reduzida: $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$. A curva é uma elipse com equação $15x^2 + 9(y - \frac{5}{3})^2 = 100$; **c.** É um cone. Equação: $x^2 - 2yz - 2z - 2y = 2$. Equação reduzida: $x''^2 +$

$y''^2 - z''^2 = 0$. A curva é uma parábola com equação $x^2 - 2y = 2$.

21. **b.**
(i) $B = \{(1,1,0),(1,0,i),(1,0,-i)\}$.
(ii) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix}$;
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$.

23. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -i & i \\ 0 & 1 & -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$

25. **a.** Não; **b.** Sim; **c.** Não.

27. **a.** Sim; **b.** Não; **c.** Depende de T.

31. **b.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

33. $2^{101} i \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

34. **c.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,
$g = (0,1,1)_F$.
d. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
e. Temos que $[f]_F = A^{-1}[g]_F$, ou seja, $f = (-1/2, 1/2, 1/2)_F = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen}\, x + \frac{1}{2}e^x$. As soluções são $y = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen}\, x + \frac{1}{2}e^x + Ke^{-x}$, com $K \in \mathbb{R}$.

35. **a.** $X(t) = (x(t), y(t))$, onde
$x(t) = C_1 e^{2t}\cos 3t + C_2 e^{2t}\text{sen}\, 3t$,
$y(t) = (-2C_1 - 3C_2)e^{2t}\cos 3t + (3C_1 - 2C_2)e^{2t}\text{sen}\, 3t$ e C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.
b. $X(t) = (x(t), y(t))$, onde
$x(t) = e^{2t}(\cos 3t - \text{sen}\, 3t)$,
$y(t) = e^{2t}(\cos 3t + 5\text{sen}\, 3t)$.

36. $x_1(t) = C_1 e^{3t} + (-3C_2 + 4C_3)e^t\cos t + (4C_2 + 3C_3)e^t \text{sen}\, t$, $x_2(t) = 5C_2 e^t \cos t - 5C_3 e^t \text{sen}\, t$ e $x_3(t) = -5C_3 e^t \cos t - 5C_2 e^t \text{sen}\, t$, onde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ são arbitrários.

37. $X(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_3 \text{sen}\, 2t + C_4 \cos 2t \\ C_2 e^t + C_3 \cos 2t - C_4 \text{sen}\, 2t \\ C_2 e^t + 2C_3 \cos 2t - 2C_4 \text{sen}\, 2t \end{bmatrix}$.

38. **a.** $x(t) = 10 + 5e^{-t/10}$ e $y(t) = 10 - 5e^{t/10}$; **b.** Aproximadamente 5 minutos.

39. **a.** $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde
$$\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{-t} + C_3\, e^{5t} \\ y(t) = C_2\, e^{-t} + C_3\, e^{5t} \\ z(t) = -3\, C_1\, e^{-t} - C_2\, e^{-t} + 2\, C_3\, e^{5t} \end{cases}$$
b. $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde
$$\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{-2t} + C_3\, e^{4t} \\ y(t) = -2C_2\, e^{-3t} + C_3\, e^{4t} \\ z(t) = C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{-3t} + C_3\, e^{4t} \end{cases}$$
e C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias em ambos os itens.

40. **a.** $x(t) = 14e^t - 12e^{-2t}$ e
$y(t) = 14e^t - 3e^{-2t}$.
b. $x(t) = 2e^t - e^{2t}$,
$y(t) = -2e^t - e^{2t}$ e $z(t) = -2e^t$.

41. **a.** $X_0(t) = (25, \frac{50}{3})$.
b. $Z(t) = C_1 e^{-t/50}(1,1) + C_2 e^{-3t/25}(-3,2)$, onde C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.
c. $x(t) = 3e^{-t/50} + 9e^{-3t/25} + 25$ e $y(t) = 3e^{-t/50} - 6e^{-3t/25} + \frac{50}{3}$.

Respostas dos testes:

8. **e.**; 9. **e.**; 11. **d.**; 12. **b.**;
14. **a.**; 18. **b.**; 20. **e.**; 22. **b.**;
24. **d.**; 26. **c.**; 28. **d.**; 29. **c.**;
30. **c.**; 32. **d.**.