

Nesta prova, o subespaço gerado por vetores v_1, \dots, v_n é denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. A base canônica de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n é denotada por can . A transposta de uma matriz A é denotada por A^t . Tanto a matriz identidade quanto o operador identidade de um espaço vetorial são denotados por I .

Q1. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que $v_1 = (1, 3)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ e que $v_2 = (-3, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 10$. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para a cônica de equação:

$$9x^2 + y^2 - 6xy + 2x + 6y = 0.$$

- (a) $-2u = v^2$;
- (b) $2u = -\sqrt{10}v^2$;
- (c) $u - v^2 = 0$;
- (d) $u = -\sqrt{10}v^2$;
- (e) $2v^2 = 1$.

Q2. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^6 e seja $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja:

$$p_T(t) = t^4(t - a)(t - b),$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$ e $a \neq b$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $a \notin \mathbb{R}$ então b é o conjugado de a ;
- (II) T não é injetor;
- (III) se T é diagonalizável então $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q3. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^6 e seja $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$ um operador linear tal que $\dim[\text{Ker}(T - (-1 + i)\text{I})] = 3$. Suponha que a matriz $[T]_{\text{can}}$ seja real e considere as seguintes afirmações:

- (I) T não é diagonalizável;
- (II) T não tem autovalores reais;
- (III) $T^{204} = -2^{102} \text{I}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q4. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno canônico e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear simétrico tal que:

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(-1, 0, 1), (2, -1, 0)], \quad \text{Ker}(T + I) = [(1, 2, 1)].$$

Uma matriz M tal que:

$$M^t[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

$$(a) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(e) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Q5. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 e seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ um operador linear. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se $T \circ T = T$ então T é diagonalizável;
- (II) se $T \neq 0$ e $T \circ T = 0$ então T é diagonalizável;
- (III) se existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $ab \neq 0$ tais que $a + bi$ é um autovalor de T então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q6. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^4 e o espaço vetorial real \mathbb{R}^4 . Sejam:

$$T_1 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4, \quad T_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

operadores lineares tais que $[T_1]_{\text{can}} = [T_2]_{\text{can}}$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se T_2 é diagonalizável então T_1 é diagonalizável;
- (II) se T_1 é diagonalizável então T_2 é diagonalizável;
- (III) todo autovetor de T_1 é autovetor de T_2 .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q7. Seja $X(t) = (x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}$. Vale que $3x(0) + 4y(0)$ é igual a:

- (a) -3 ;
- (b) -5 ;
- (c) 1 ;
- (d) 4 ;
- (e) -2 .

Q8. Seja $k \in \mathbb{R}$. A equação:

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2kx + 4kz + 6 = 0$$

possui uma única solução $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se e somente se:

- (a) $k = 1$ ou $k = -1$;
- (b) $k = 2$ ou $k = -2$;
- (c) $k = \sqrt{3}$ ou $k = -\sqrt{3}$;
- (d) $k = \sqrt{2}$ ou $k = -\sqrt{2}$;
- (e) $k = \sqrt{5}$ ou $k = -\sqrt{5}$.

Q9. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no espaço. A equação:

$$8u^2 + 20v^2 - 20w^2 = 21$$

é uma equação reduzida para a quádrlica de equação:

$$2x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz + \sqrt{5}y + 2\sqrt{5}z + k = 0$$

se e somente se:

- (a) $k = 1$;
- (b) $k = -4$;
- (c) $k = 3$;
- (d) $k = -2$;
- (e) $k = 0$.

Q10. Sejam $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = (1-t)^2(t^2-2t+2)$, pode-se afirmar que:

- (a) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$;
- (b) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $\beta = 0$;
- (c) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (d) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $\gamma = 0$;
- (e) a matriz A não é diagonalizável sobre \mathbb{C} .

Q11. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Se $X_1(t) = e^t(1, -1)$ e $X_2(t) = e^{5t}(1, 3)$ são soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$, pode-se concluir que $b + 3c$ é igual a:

- (a) 5;
- (b) 4;
- (c) 8;
- (d) 6;
- (e) 10.

Q12. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 e seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (2ix + y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que os autovalores de T sejam $a + bi$ e $a - bi$;
- (II) \mathbb{C}^2 possui uma base constituída por autovetores de T ;
- (III) a matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{C}^2 é simétrica.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q13. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^4 e seja $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ um operador linear tal que $[T]_{\text{can}} \in M_4(\mathbb{R})$. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se λ é um autovalor real de T então a multiplicidade algébrica de λ é igual a 2;
- (II) se $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ e T tem um autovalor complexo não real então T é diagonalizável;
- (III) se $[T]_{\text{can}}$ é uma matriz simétrica então todos os autovalores de T são reais.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja $b \in \mathbb{R}$ e considere a equação:

$$3x^2 + 8xy + 3y^2 - b = 0.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se $b < 0$ então a equação dada define uma hipérbole;
- (II) se $b > 0$ então a equação dada define uma elipse;
- (III) se $b = 0$ então a equação dada define um par de retas concorrentes.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q15. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz tal que $v_1 = (-2, 3, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e $v_2 = (1, i, 0)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2 - i$. Se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, 2, 1)$ então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $2x(t) + 3y(t) + z(t)$ é igual a:

- (a) $e^{2t}(6 + 5 \cos t + 14 \operatorname{sen} t)$;
- (b) $e^{2t}(1 + 10 \cos t + 11 \operatorname{sen} t)$;
- (c) $e^{2t}(1 + 11 \cos t + 10 \operatorname{sen} t)$;
- (d) $e^{2t}(2 + 11 \cos t + 5 \operatorname{sen} t)$;
- (e) $e^{2t}(6 + 14 \cos t + 5 \operatorname{sen} t)$.

Q16. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz tal que:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (3, 1, 2)$, pode-se concluir que $3x(1) + y(1) + z(1)$ é igual a:

- (a) $4e^2 + 2e^3$;
- (b) $-2e^2 + 4e^3$;
- (c) $-2e^2 + e^3$;
- (d) $10e^2 + 2e^3$;
- (e) $4e^2 + e^3$.