

Nesta prova, o subespaço gerado por vetores v_1, \dots, v_n é denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. A base canônica de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n é denotada por can . A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é denotada por A^t e o seu traço por $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$. Tanto a matriz identidade quanto o operador identidade de um espaço vetorial são denotados por I . Se λ é um autovalor de uma matriz ou de um operador, então o autoespaço correspondente é denotado por $V(\lambda)$.

Q1. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real. Suponha que i seja um autovalor de A e que $(1, 0, -i, 1-i)$ e $(0, 1, 1, i)$ sejam autovetores de A associados ao autovalor i . Pode-se afirmar que:

- (a) $A^{10} = I$;
- (b) $A^{10} = A$;
- (c) $A^{10} = -I$;
- (d) $A^{10} = 0$;
- (e) $A^{10} = -A$.

Q2. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real. Assuma que $(1, -i)$ seja um autovetor de A associado ao autovalor $2 - 3i$. A solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (1, -1)$ é:

- (a) $X(t) = e^{2t}(1, -1)$;
- (b) $X(t) = e^{2t}(\cos(3t) - \sin(3t), -\sin(3t) - \cos(3t))$;
- (c) $X(t) = e^{2t}(-\cos(3t) + \sin(3t), \sin(3t) - \cos(3t))$;
- (d) $X(t) = e^{2t}(\cos(3t), -\cos(3t))$;
- (e) $X(t) = e^{2t}(\cos(3t) + \sin(3t), \sin(3t) - \cos(3t))$.

Q3. Considere o espaço vetorial $P_1(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in P_1(\mathbb{R}).$$

Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ um operador linear e assumamos que o espaço $P_1(\mathbb{R})$ possua uma base ortonormal formada por autovetores de T . Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O valor de a é igual a:

- (a) 1;
- (b) $\sqrt{3}$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (d) $\frac{1}{3}$;
- (e) 3.

Q4. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se T for invertível e se λ for um autovalor de T então $\lambda \neq 0$;
- (II) se T for invertível então, para todo $\lambda \neq 0$, vale que λ é um autovalor de T se e somente se $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de T^{-1} ;
- (III) se u e v são autovetores de T associados a autovalores distintos então $u + v$ é um autovetor de T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q5. Considere o produto interno em $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P_2(\mathbb{R})$ definidos por:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -2 + x + 2x^2, & p_2(x) &= 1 + x - 2x^2, \\ p_3(x) &= 5 + x + 10x^2, & p_4(x) &= 3 - x - 6x^2. \end{aligned}$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) p_1 é ortogonal a p_3 ;
- (b) p_1 é ortogonal a p_4 ;
- (c) p_1 é ortogonal a p_2 ;
- (d) p_2 é ortogonal a p_4 ;
- (e) p_2 é ortogonal a p_3 .

Q6. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos que a equação:

$$ax^2 + 4xy + by^2 = 1$$

define uma elipse se e somente se:

- (a) $ab > 4$ e $a > 0$;
- (b) $ab < 4$;
- (c) $a > 0$ e $b > 0$;
- (d) $a > 0$ ou $b > 0$;
- (e) $ab > 4$.

Q7. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p_A(t) = -t(1+i-t)^2$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $1-i$ é um autovalor de A ;
- (II) $\dim(V(1+i)) = 2$;
- (III) A não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q8. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se os polinômios $1+t$ e $1-t$ pertencem a $\text{Im}(T)$ então:

$$\dim(\text{Ker}(T)) \leq 1;$$

- (II) se $\dim(\text{Im}(T - 2I)) = 1$ então 2 é uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 1;
- (III) se existem $p_1, p_2, p_3 \in P_2(\mathbb{R})$ não nulos tais que:

$$T(p_1) = p_1, \quad T(p_2) = -p_2, \quad T(p_3) = 2p_3$$

então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q9. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja W o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Se B é o elemento de W mais próximo de A então a distância entre A e B é igual a:

- (a) 2;
- (b) 1;
- (c) 4;
- (d) 3;
- (e) 5.

Q10. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 + t^2, 1 - t, 2t\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(p) = (p'(a), p(b))$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$. Se:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

então:

- (a) $a = 8$ e $b = 2$;
- (b) $a = 1$ e $b = 1$;
- (c) $a = -2$ e $b = 0$;
- (d) $a = 4$ e $b = 1$;
- (e) $a = 4$ e $b = -1$.

Q11. Sejam V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se λ e μ são autovalores distintos de T e se $\dim(V) - \dim(V(\lambda)) = 1$ então T é diagonalizável;
- (II) T é sobrejetor se e somente se $\text{Ker}(T) = \{0\}$;
- (III) para todo $v \in V$, o conjunto:

$$\{x \in V : T(x) = v\}$$

é um subespaço de V .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q12. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no espaço e considere a quádrica de equação:

$$2xy + z = 0.$$

Uma equação reduzida para essa quádrica é:

- (a) $r^2 - s^2 + t = 0$;
- (b) $r^2 + s^2 + t = 0$;
- (c) $r^2 + s^2 - t = 0$;
- (d) $r^2 - s^2 + 2t = 0$;
- (e) $r^2 + s^2 + t = \sqrt{2}$.

Q13. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se o operador T é simétrico e \mathcal{B} é uma base de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal então a base \mathcal{B} é ortonormal;
- (II) o operador T é simétrico se e somente se todas as raízes complexas do polinômio característico de T são reais;
- (III) se o operador T é simétrico, λ e μ são autovalores distintos de T e se $u \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ e $v \in \text{Ker}(T - \mu I)$ então u e v são ortogonais.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q14. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que o subespaço $[(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ de \mathbb{R}^3 é invariante por T , pode-se concluir que o valor de a é igual a:

- (a) 2;
- (b) -2;
- (c) 0;
- (d) -1;
- (e) 1.

Q15. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{R} se e somente se:

- (a) $b = 0$;
- (b) $a = 0$ e $c = 0$;
- (c) $abc = 0$;
- (d) $ac = 0$;
- (e) $a = 0, b = 0$ e $c = 0$.

Q16. Sejam n um inteiro maior do que 1 e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real. Considere as seguintes afirmações a respeito da matriz A :

- (I) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (II) A é diagonalizável sobre \mathbb{R} ;
- (III) todas as raízes complexas do polinômio característico de A são reais.

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) assumindo-se (III), conclui-se (I);
- (b) assumindo-se (II), conclui-se (III);
- (c) assumindo-se (I) e (III), conclui-se (II);
- (d) assumindo-se (II), conclui-se (I);
- (e) assumindo-se (I), não se pode concluir (III).