

MAT-2458 - ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II

3ª Lista de Exercícios - 2º semestre de 2012

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z).$$

- (a) Ache uma base de \mathbb{R}^3 formada por vetores próprios de T .
(b) Considerando \mathbb{R}^3 com o produto interno usual mostre que *não existe* uma base *ortogonal* formada por vetores próprios de T . (Se ortogonalizarmos a base encontrada em (a) *não* obteremos uma base formada por *vetores próprios* de T . Por que?)
2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cujos valores próprios são 2, -3 e 0 e tal que $V(-3) = [(1, 1, 1)]$ e $V(2) = [(1, 0, -1)]$. Seja

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ (onde can indica a base canônica de \mathbb{R}^3) é diagonal.

- (a) Exiba $[T]_{\text{can}}$.
(b) É T invertível? Justifique.
(c) É $v = (1, -2, 1)$ um vetor próprio de T ? Justifique.
3. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, determine uma base ortonormal B formada por vetores próprios do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é:

$$(a) \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T então T é simétrico;
(II) se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ então u é ortogonal a v ;
(III) T é simétrico se e somente se T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

5. Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \rightarrow E$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) se B é uma base ortogonal de E então a matriz $[T]_B$ é simétrica;

(II) se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T , A_1 e A_2 são conjuntos ortogonais de vetores de E tais que:

$$A_1 \subset \text{Ker}(T - \lambda_1 I), \quad A_2 \subset \text{Ker}(T - \lambda_2 I),$$

então a união $A_1 \cup A_2$ é um conjunto ortogonal;

(III) se B é uma base de E tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal então B é ortonormal.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T : V \rightarrow V$ definida por $T(v) = \text{proj}_W(v)$, a projeção ortogonal de v em W .

(a) Prove que $T^2 = T$.

(b) Prove que $\text{Ker } T = W^\perp$ e $\text{Im } T = W$.

(c) Prove que existe uma base *ortonormal* B de V tal que $[T]_B =$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
 onde o

número de 1's na diagonal é igual à dimensão de W .

(d) Prove que T é um operador simétrico.

7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja $S \neq V$ um subespaço de V e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere a afirmação abaixo:

“Se S é (i) então S^\perp é (ii)”.

A substituição de (i) e (ii), respectivamente, pelas expressões abaixo que forma uma afirmação FALSA é:

- (a) “invariante por T ”, “autoespaço de T ”;
- (b) “a imagem de T ”, “autoespaço de T ”;
- (c) “a imagem de T ”, “o núcleo de T ”;
- (d) “autoespaço de T ”, “invariante por T ”;
- (e) “o núcleo de T ”, “a imagem de T ”.

8. Seja V um espaço vetorial com produto interno \langle, \rangle e sejam $u, w \in V$ vetores não nulos. Defina $T : V \rightarrow V$ por $T(v) = \langle v, u \rangle w$ para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se u e w são vetores linearmente dependentes.

9. Estabeleça uma correspondência entre as equações

$$\begin{array}{lll} (1) x^2 + 2y^2 - 1 = 0, & (2) x^2 + y^2 + 1 = 0, & (3) x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0, \\ (4) x^2 - y^2 - 1 = 0, & (5) x^2 + y^2 = 0, & (6) x - y^2 = 0, \\ (7) x^2 - y^2 = 0, & (8) x^2 + y^2 - 1 = 0, & (9) x^2 + 2xy + y^2 = 0. \end{array}$$

e os tipos de cônicas

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------|
| (a) conjunto vazio, | (b) um ponto, | (c) uma reta, |
| (d) duas retas paralelas, | (e) duas retas concorrentes, | (f) elipse, |
| (g) hipérbole, | (h) parábola, | (i) circunferência. |

10. Diga se as seguintes cônicas, cujas equações são dadas em relação ao sistema de coordenadas (O, \vec{i}, \vec{j}) , são: duas retas paralelas, um ponto, duas retas concorrentes, elipse, uma reta, parábola, circunferência ou hipérbole.

$$\begin{array}{l} (a) 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0 \\ (b) x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ (c) x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0 \\ (d) 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0 \end{array}$$

11. Diga se as seguintes quádricas, cujas equações são dadas em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, são: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico ou parabolóide hiperbólico.

$$\begin{array}{l} (a) 2xy + z = 0 \\ (b) x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0 \\ (c) x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1 \\ (d) 11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6 \end{array}$$

12. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

onde a é um número real não nulo. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se $0 < a < 1$ então a equação define uma hipérbole;
- (II) se $a > 1$ então a equação define uma elipse;
- (III) se $a = 1$ então a equação define um par de retas paralelas.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

13. (a) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz . Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela intersecção dessa superfície com o plano $y = 1$.

(b) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0, -1, -2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$.

Determine uma equação reduzida da superfície. Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela intersecção dessa superfície com o plano $z = 0$.

(c) Refaça (b), considerando $Q = (0, -1, -1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$

14. Seja dado $k \in \mathbb{R}$. A equação:

$$5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k,$$

com incógnitas x, y, z , não tem solução se:

(a) $k = -11$; (b) $k = -11$; (c) $k = 11$; (d) $k = 22$; (e) $k = -22$.

15. (a) Verifique que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + z, y, -x + y + z)$ não é diagonalizável.

(b) Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ o operador linear dado por $T(x, y, z) = (x + z, y, -x + y + z)$.

(i) Verifique que T é diagonalizável e determine uma base B de \mathbb{C}^3 formada por autovetores de T .

(ii) Determine uma matriz invertível $M \in M_3(\mathbb{C})$ e uma matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{C})$ tais que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M = D$, onde $\text{can} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é a base canônica de \mathbb{C}^3 .

16. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz complexa arbitrária e se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A então o conjugado $\bar{\lambda}$ é necessariamente um autovalor de A ;

(II) se $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um operador linear e se existe uma base B de \mathbb{C}^n tal que a matriz $[T]_B$ seja real então pode-se concluir que, para todo autovalor λ de T , o conjugado $\bar{\lambda}$ é também um autovalor de T que possui a mesma multiplicidade algébrica que λ ;

(III) se $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um operador linear que é representado por uma matriz real na base canônica de \mathbb{C}^n então *todo* elemento de $\text{Ker}(T)$ está em \mathbb{R}^n .

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma das alternativas é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

17. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ o operador linear no espaço vetorial complexo \mathbb{C}^n cuja matriz em relação à base canônica é A . Denote por p_T o polinômio característico de T . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são tais que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente sobre \mathbb{R} então $\{v_1, \dots, v_k\}$ também é linearmente independente sobre \mathbb{C} ;
- (II) se $\alpha \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T e $\alpha \notin \mathbb{R}$ então existe $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo tal que $T(v) = \alpha v$;
- (III) dado $\alpha \in \mathbb{C}$, então α é raiz de p_T se e somente se seu complexo conjugado $\bar{\alpha}$ for raiz de p_T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

18. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, e determine uma matriz invertível

M e uma matriz diagonal D tais que $M^{-1}AM = D$.

19. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável.

(a) $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

20. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $a \neq 1$ e $c = 0$;
- (b) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $a \neq 1$ e $b = 0$;
- (c) para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (d) a matriz A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se e somente se $a \neq 0$;
- (e) para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, a matriz A não é diagonalizável sobre \mathbb{C} .

21. Seja $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ um operador linear com polinômio característico $f(x)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

- (a) $f(x) = x^4 - 1$
- (b) $f(x) = x^2(x^2 + 1)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 1$
- (c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$

22. Sejam n um inteiro maior do que 1 e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real. Considere as seguintes afirmações:

- (I) A é diagonalizável sobre \mathbb{C} ;
- (II) A é diagonalizável sobre \mathbb{R} ;
- (III) todas as raízes complexas do polinômio característico de A são reais.

Assinale a alternativa contendo uma afirmação FALSA:

- (a) (I) não implica (III);
- (b) (II) implica (III);
- (c) (III) implica (I);
- (d) (II) implica (I);
- (e) assumindo-se (I) e (III), conclui-se (II).

23. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, onde $n \geq 2$. Denote por p_A o polinômio característico de A . Assinale a alternativa contendo uma afirmação FALSA:

- (a) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ então o número de autovalores complexos não reais distintos de A é par;
- (b) A pode ter um número ímpar de autovalores complexos não reais distintos;
- (c) se p_A tem coeficientes reais e $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de A então $\bar{\lambda}$ também é autovalor de A ;
- (d) se p_A tem coeficientes reais e $u, v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $w = u + iv$ é autovetor de A então $\bar{w} = u - iv$ também é autovetor de A ;
- (e) p_A pode ter coeficientes reais mesmo que $A \notin M_n(\mathbb{R})$.

24. Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um operador linear tal que $[T]_{\text{can}} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo-se que T possui 3 autovalores distintos e que $(1, 2, 3)$ é um autovetor de T , qual dos seguintes vetores de \mathbb{C}^3 **não** pode ser autovetor de T ?

- (a) $(1, 2, 3) + i(2, 4, 6)$;
- (b) $i(1, 2, 3)$;
- (c) $(2, 4, 6) + i(1, 1, 1)$;
- (d) $(1, 2, 3) + 4(5, 6, 7)$;
- (e) $(1, 1, 1) + i(2, 2, 2)$.

25. Consideremos \mathbb{C} como um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Neste caso, \mathbb{C} tem dimensão 2 e $B = \{1, i\}$ é uma base de \mathbb{C} . Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o operador linear dado por $P(z) = iz$.

(a) Verifique que $[P]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Calcule $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{102}$.

26. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ o operador linear no espaço vetorial complexo \mathbb{C}^4 cuja matriz em relação à base canônica é A . Se i é um autovalor de T e $(-i, 1 - i, 1, 0)$ e $(0, 1 + i, 0, 2)$ são autovetores de T associados a i então:

- (a) $A^{15} = 0$;
- (b) $A^{15} = A$;
- (c) $A^{15} = I$;
- (d) $A^{15} = -A$;
- (e) $A^{15} = -I$.

27. Seja $A = \begin{bmatrix} 1+3i & -2i \\ 4i & 1-3i \end{bmatrix}$. Calcule A^{202} .

28. Seja o sistema $X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} X$.

(a) Determine a solução geral do sistema.

(b) Determine a solução particular do sistema que verifica as condições iniciais $X(0) = (1, 1)$.

29. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, e o sistema $X' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} X$. Determine a solução geral do sistema.

30. Determine todas as funções $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) que verificam

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

31. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \\ x_3'(t) = 5x_3(t) - 6x_4(t) \\ x_4'(t) = 3x_3(t) - 1x_4(t) \end{cases}$$

(a) Determine todas as soluções do sistema.

(b) Determine a solução do sistema que verifica

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 1, \quad x_4(0) = 1.$$

32. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

tem autovalores $1, 2i, -2i$. Determine todas as soluções do sistema $X'(t) = AX(t)$.

33. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 243) Consideremos dois tanques: o tanque A contem inicialmente 100 l de água e 15 kg de sal; o tanque B contem inicialmente 100 l de água e 5 kg de sal. Um mecanismo permite a vazão do tanque A para o tanque B e vice-versa; a velocidade de vazão é constante e igual a 5 l/min . Suponhamos que, em cada instante t , as soluções nos tanques A e B estejam perfeitamente homogeneizadas, a quantidade de sal no tanque A é $x(t)$ e no tanque B é $y(t)$.

(a) Mostre que $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do sistema $\begin{cases} x' = -0,05x + 0,05y \\ y' = 0,05x - 0,05y \end{cases} \quad x(0) = 15, y(0) = 5.$

Determine a solução deste sistema.

(b) Após quantos minutos haverá 13 kg de sal no tanque A ?

34. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t)$, em que:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 12 \\ -14 & 4 & 14 \\ -11 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

35. Ache a solução dos seguintes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 11.$$

$$(b) \begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x - y + 3z \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -3, z(0) = -2.$$

36. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 255) Consideremos o *sistema não-homogêneo*

$$(*) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine uma solução particular do sistema (*) da forma $X_0(t) = (a, b)$, em que a e b são números reais.

(b) Determine a solução geral $Z(t)$ do *sistema homogêneo associado*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(c) Verifique que a solução geral do sistema (*) é dada por $X(t) = X_0(t) + Z(t)$.

(d) Encontre a solução particular do sistema (*) que verifica as condições iniciais

$$x(0) = 37, y(0) = \frac{41}{3}.$$

RESPOSTAS

1. (a) $\{(1, 0, -3), (0, -1, 1), (1, 1, 2)\}$

2. (a) $[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Não (c) Sim

3. (a) $\{(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\}$

(b) $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})\}$

9. 1-f, 2-a, 3-d, 4-g, 5-b, 6-h, 7-e, 8-i, 9-c

10. (a) elipse (b) parábola (c) hipérbole (d) duas retas concorrentes

11. (a) parabolóide hiperbólico (b) parabolóide hiperbólico

(c) hiperbolóide de uma folha (d) elipsóide

13. (a) É um cone. Equação: $z^2 = x^2 + y^2$. A curva é uma hipérbole com equação $z^2 - x^2 = 1$.

(b) É um cone. Equação: $5x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz - 10y - 20z = 25$.

$$\text{Equação reduzida: } x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$$

A curva é uma elipse com equação $15x^2 + 9(y - \frac{5}{3})^2 = 100$.

(c) É um cone. Equação: $x^2 - 2yz - 2z - 2y = 2$.

$$\text{Equação reduzida: } x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$$

A curva é uma parábola com equação $x^2 - 2y = 2$.

15. (b) (i) $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, i), (1, 0, -i)\}$

$$(b) (ii) M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$18. M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -i & i \\ 0 & 1 & -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

19. (a) Não é diagonalizável (b) É diagonalizável (c) Não é diagonalizável

21. (a) T é diagonalizável (b) T não é diagonalizável (c) Depende de T

$$25. (b) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$27. 2^{101}i \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

28. (a) $X(t) = (x(t), y(t))$,

$$\text{onde } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2 e^{2t} \sin 3t \\ y(t) = (-2C_1 - 3C_2) e^{2t} \cos 3t + (3C_1 - 2C_2) e^{2t} \sin 3t \end{cases} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$(b) X(t) = (x(t), y(t)), \text{ onde } \begin{cases} x(t) = e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t) \\ y(t) = e^{2t}(\cos 3t + 5 \sin 3t) \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x(t) = e^{at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt) \\ y(t) = e^{at}(C_2 \cos bt + C_1 \sin bt) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$30. \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{3t} + (-3C_2 + 4C_3) e^t \cos t + (4C_2 + 3C_3) e^t \sin t \\ x_2(t) = 5C_2 e^t \cos t - 5C_3 e^t \sin t \\ x_3(t) = -5C_3 e^t \cos t - 5C_2 e^t \sin t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

$$31. (a) \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t \\ x_2(t) = C_2 e^{-t} \\ x_3(t) = -(C_3 + C_4) e^{2t} \sin 3t + (C_3 - C_4) e^{2t} \cos 3t \\ x_4(t) = -C_4 e^{2t} \sin 3t + C_3 e^{2t} \cos 3t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

$$(b) \begin{cases} x_1(t) = e^t \\ x_2(t) = e^{-t} \\ x_3(t) = -e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t \\ x_4(t) = e^{2t} \cos 3t \end{cases}$$

$$32. X(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t \\ C_2 e^t + C_3 \cos 2t - C_4 \sin 2t \\ C_2 e^t + 2C_3 \cos 2t - 2C_4 \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$33. (a) \begin{cases} x(t) = 10 + 5e^{-0,1t} \\ y(t) = 10 - 5e^{-0,1t} \end{cases} \quad (b) \text{Aproximadamente 5 minutos.}$$

$$34. (a) X(t) = (x(t), y(t), z(t)), \text{ onde } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_3 e^{5t} \\ y(t) = C_2 e^{-t} + C_3 e^{5t} \\ z(t) = -3 C_1 e^{-t} - C_2 e^{-t} + 2 C_3 e^{5t} \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

$$(b) X(t) = (x(t), y(t), z(t)), \text{ onde } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_3 e^{4t} \\ y(t) = -2C_2 e^{-3t} + C_3 e^{4t} \\ z(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + C_3 e^{4t} \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

$$35. (a) \begin{cases} x(t) = 14 e^t - 12 e^{-2t} \\ y(t) = 14 e^t - 3 e^{-2t} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x(t) = 2 e^t - e^{2t} \\ y(t) = -2 e^t - e^{2t} \\ z(t) = -2 e^t \end{cases}$$

$$36. (a) X_0(t) = \left(25, \frac{50}{3}\right) \quad (b) Z(t) = C_1 e^{-0,02t}(1, 1) + C_2 e^{-0,12t}(-3, 2) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$(d) \begin{cases} x(t) = 3 e^{-0,02t} + 9 e^{-0,12t} + 25 \\ y(t) = 3 e^{-0,02t} - 6 e^{-0,12t} + \frac{50}{3} \end{cases}$$

Respostas dos testes:

4. (d). 5. (b). 7. (a). 12. (b). 14. (e). 16. (b).
17. (d). 20. (c). 22. (c). 23. (d). 24. (c). 26. (d).