

## MAT2458 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II

### 2ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2012

1. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

- (a) Existe uma transformação linear  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  cuja matriz em relação às bases canônicas é a matriz identidade.
  - (b) Se  $T : P_8(\mathbb{R}) \rightarrow P_8(\mathbb{R})$  é definida por  $T(p) = p'$ , então existe uma base de  $P_8(\mathbb{R})$  tal que a matriz de  $T$  em relação a esta base é invertível.
  - (c) Se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  é uma transformação linear injetora então para qualquer base de  $\mathbb{R}^3$  a matriz de  $T$  em relação a esta base é invertível.
  - (d) Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear, então  $T$  é sobrejetor se, e somente se, existe uma base de  $V$  tal que a matriz de  $T$  em relação a esta base é invertível.
  - (e) Se  $B$  e  $C$  são bases de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear, então as matrizes  $[T]_B$  e  $[T]_C$  são semelhantes.
2. Determine a matriz do operador derivação  $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$  definido por  $\mathcal{D}(p) = p'$ , relativamente à base  $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  de  $P_4(\mathbb{R})$ .
3. Considere os subespaços vetoriais  $U$  e  $V$  de  $C^\infty(\mathbb{R})$  cujas bases são respectivamente  $B = \{\cos x, \sin x\}$  e  $C = \{e^x \cos x, e^x \sin x, e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}$ . Determine as matrizes dos operadores de derivação  $f \in U \mapsto f' \in U$  e  $f \in V \mapsto f' \in V$  com respeito às bases  $B$  e  $C$ , respectivamente.
4. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(2, 3) = (2, 3)$  e  $T(-3, 2) = (0, 0)$ ?
5. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $B = \{(-1, 1), (0, 1)\}$  é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T(x, y) = (x, 3x + y)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (II) a imagem pela transformação  $T$  da parábola  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  é a parábola  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$ ;
- (III) o vetor  $(2, 3)$  pertence à imagem de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

6. Considere o subespaço  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelas colunas da matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Obtenha números reais  $a, b, c$  de modo que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

7. Considere as transformações lineares  $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  e  $S : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definidas por  $T(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $S(p) = (p(0), p(1), \dots, p(n))$ . Determine as matrizes de  $S \circ T$  e de  $T \circ S$  com respeito às bases canônicas apropriadas.

8. Se  $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  é a transformação linear cuja matriz em relação às bases  $B = \{1, 1+t\}$  de  $P_1(\mathbb{R})$  e  $C = \{2+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$  é:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

então  $T(1+2t)$  é igual a:

- (a)  $1+7t^2$ ;  
 (b)  $3+4t-2t^2$ ;  
 (c)  $5+4t-t^2$ ;  
 (d)  $-1+4t+5t^2$ ;  
 (e)  $9-6t^2$ .
9. Sejam  $F, G$  operadores lineares em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $F(x, y, z) = (x, 2y, y-z)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , e tais que a matriz do operador  $2F - G$  em relação à base  $B = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  seja  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Ache a matriz que representa o operador  $F^2 + G^2$  com respeito às bases  $B$  e  $C = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ .
10. Seja  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$  e considere o operador linear  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definido por  $T(A) = BA$ , para todo  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Ache a matriz do operador  $S = T^2 - T$  em relação à base canônica de  $M_2(\mathbb{R})$ .
11. Sejam  $T, S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  operadores lineares tais que

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, 3z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad [S \circ T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

O traço da matriz  $[S]_{\text{can}}$  (ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de  $[S]_{\text{can}}$ ) é igual a

- (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4; (e) 5.

12. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  e  $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformações lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [G]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad C = \{1, 1 + x, x + x^2\}.$$

(a) Determine bases para  $\text{Ker}(G \circ T)$  e  $\text{Ker}(T \circ G)$ .

(b) Seja  $H = 3(T \circ G) + I$ . Determine  $[H]_{DC}$ , onde  $D = \{1, x, x^2\}$ .

13. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^3$  é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) não existem  $a$  e  $b$  que tornem  $T$  injetora;
  - (b)  $T$  é bijetora para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
  - (c)  $T$  é bijetora para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \neq b$ ;
  - (d) não existem  $a, b \in \mathbb{R}$  que tornem  $T$  sobrejetora;
  - (e)  $T$  é bijetora se  $a = b$ .
14. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear tal que  $T^2 = T$ . Prove que  $T = 0$  ou  $T = I$  ou existe uma base  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear não nulo tal que  $T^2 = 0$ . Prove que existe uma base  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definido por  $T(x, y, z, w) = (-y, x - y, z, -w)$ . Mostre que  $T^6 = I$  e determine  $T^{-1}$ .

17. Mostre que se  $A \in M_2(\mathbb{R})$  então seu polinômio característico é dado por

$$p_A(t) = t^2 - a_1 t + a_0$$

onde  $a_0 = \det(A)$  e  $a_1 = \text{traço}(A)$ .

18. Mostre que se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é diagonalizável, então a matriz  $A^m$  é diagonalizável qualquer que seja o número natural  $m$ ,  $m \geq 1$ .

19. Encontre uma matriz  $A$  não diagonalizável tal que a matriz  $A^2$  seja diagonalizável.

Sugestão:  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

20. Mostre que o operador linear  $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  dado por

$$T(u(x)) = \int_0^x u(s)ds$$

não tem autovalores.

21. Seja  $T$  um operador linear com autovalores 0, 1, 2 e 3. Assinale a alternativa contendo uma afirmação FALSA:

- (a) 5, 6, 9 e 14 são autovalores de  $5I + T^2$ ;
- (b)  $T$  é invertível e 0, 1,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  são autovalores de  $T^{-1}$ ;
- (c) 0, 1, 4 e 9 são autovalores de  $T^2$ ;
- (d) 0, 1, 8 e 27 são autovalores de  $T^3$ ;
- (e) 0, 3, 6 e 9 são autovalores de  $3T$ .

22. Mostre que se  $\lambda$  é um autovalor do operador linear  $T : V \rightarrow V$  e  $n$  é um número natural, então:

- (a)  $\lambda^n$  é um autovalor de  $T^n$ .
- (b) Se  $f(t)$  é um polinômio qualquer então  $f(\lambda)$  é um autovalor de  $f(T)$ .

23. Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $u$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $v$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $u + v$  é autovetor de  $T$  se e somente se  $\mu = \lambda$  e  $u + v \neq 0$ ;
- (b) se  $\lambda = \mu$  então  $\lambda u + v$  não é um autovetor de  $T$ ;
- (c) se  $\lambda \neq \mu$  então  $u$  e  $v$  podem ser linearmente dependentes;
- (d) se  $\lambda \neq \mu$  então, para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $3u + \beta v$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $3\lambda + \beta\mu$ ;
- (e) se  $\lambda = \mu$  então  $u - v$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor 0.

24. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear invertível. Prove que:

- (a) Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  então  $\lambda \neq 0$ .
- (b)  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  se, e somente se  $\frac{1}{\lambda}$  é um valor próprio de  $T^{-1}$  (onde  $T^{-1}$  é o operador inverso de  $T$ ).
- (c) Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$ , a multiplicidade algébrica de  $\lambda$  é igual à multiplicidade algébrica de  $\frac{1}{\lambda}$ .

25. Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ . Calcule  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Sugestão:* Lembre-se de que  $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

26. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear com autovetores  $v_1 = (1, -1)$  e  $v_2 = (1, 1)$  correspondendo respectivamente aos autovalores  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_2 = 2$ . Seja  $v = (5, 1)$ . Calcule  $T^{10}(v)$ .

27. Verifique que a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$  é semelhante à matriz  $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

28. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável. Quando for diagonalizável, determine uma matriz invertível  $M$  tal que  $M^{-1}AM$  seja uma matriz diagonal.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

29. Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , onde  $n \geq 2$ . Assuma que a soma dos elementos de qualquer linha de  $A$  seja igual a 1. Assinale a alternativa correta:

- (a)  $A$  pode não possuir autovalores reais;
  - (b) 1 e 0 são necessariamente autovalores de  $A$ ;
  - (c)  $A$  possui algum autovalor real, mas pode ser que nem 1 nem 0 sejam autovalores de  $A$ ;
  - (d) 1 é necessariamente autovalor de  $A$ , mas 0 pode não ser;
  - (e) 0 é necessariamente autovalor de  $A$ , mas 1 pode não ser.
30. Sendo  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$  e  $C = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ , considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre os autovalores e autovetores de  $T$ .
  - (b) É  $T$  diagonalizável?
31. Considere a matriz real  $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Determine *todos* os valores de  $a$ ,  $b$ , e  $c$  para os quais  $A$  é diagonalizável.

32. Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $B$  uma base de  $V$  tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ -3a & c & a \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) se  $b \neq a = 0$  então  $T$  não é diagonalizável;
  - (b) se  $|b| \neq 2|a|$  e  $a \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
  - (c) se  $a \neq 0$  e  $b = 2a = c$  então  $T$  é diagonalizável;
  - (d) se  $a = b = 0$  e  $c \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
  - (e) se  $c = 0$  e  $b = -2a \neq 0$  então  $T$  não é diagonalizável.
33. Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma transformação linear com polinômio característico indicado por  $p_T(t)$ . Verifique se  $T$  é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:
- (a)  $p_T(t) = t^4 - 1$       (b)  $p_T(t) = t^3(t + 1)$  e  $\dim \ker(T) = 2$ .
  - (c)  $p_T(t) = t^2(t^2 - 4)$  e  $\dim \ker(T) = 2$ .

34. Sejam  $U$  um espaço vetorial de dimensão 5,  $T: U \rightarrow U$  um operador linear e  $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$  seu polinômio característico. Assinale a alternativa VERDADEIRA:
- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) \geq 2$ ;
  - (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ,  $\dim(\text{Ker}(T+2I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T+I)) = 3$ ;
  - (c)  $T$  é sobrejetor;
  - (d)  $T$  não é diagonalizável pois  $\dim(U) = 5$  e  $p$  possui apenas três raízes reais;
  - (e)  $T$  é diagonalizável se, e somente se, existem  $v_1, v_2, v_3 \in U$ , linearmente independentes, tais que  $T(v_1) = -v_1$ ,  $T(v_2) = -v_2$  e  $T(v_3) = -v_3$ .
35. Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n > 4$ ,  $T: V \rightarrow V$  um operador linear com polinômio característico  $p(t) = (1-t)(2-t)^3(3-t)^{n-4}$ . Assinale a alternativa FALSA: O operador  $T$  é diagonalizável se, e somente se,
- (a)  $\dim(\text{Im}(T-3I)) - \dim(\text{Ker}(T-2I)) = 1$ ;
  - (b)  $V = \text{Ker}(T-I) + \text{Ker}(T-2I) + \text{Ker}(T-3I)$ ;
  - (c)  $\dim(\text{Im}(T-I)) + \dim(\text{Im}(T-2I)) + \dim(\text{Im}(T-3I)) = n$ ;
  - (d)  $\dim(\text{Ker}(T-I)) + \dim(\text{Ker}(T-2I)) + \dim(\text{Ker}(T-3I)) = n$ ;
  - (e)  $\dim(\text{Ker}(T-2I)) + \dim(\text{Ker}(T-3I)) = n-1$ .
36. Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear tal que todo vetor não nulo é um autovetor de  $T$ . Escreva então  $Te_i = \alpha_i e_i$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, 3$  e  $\text{can} = \{e_1, e_2, e_3\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Calcule  $T(e_1 + e_2 + e_3)$ .
  - (b) Mostre que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .
  - (c) Prove que existe um número  $\alpha \in \mathbb{R}$  de modo que o polinômio característico de  $T$  seja
- $$p_T(t) = (t - \alpha)^3.$$
- (d) Conclua que  $T = \alpha I$  onde  $I$  é o operador identidade.
37. Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Suponha que  $\lambda \neq \mu$  sejam autovalores de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:
- (I) se  $\dim(V) - \dim(V(\lambda)) = 1$  então  $T$  é diagonalizável;
  - (II) se  $\dim(V) = \dim(V(\lambda)) + \dim(V(\mu))$  então  $T$  é diagonalizável;
  - (III)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(V) = 2$ .
- Assinale a alternativa correta:
- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
  - (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
  - (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
  - (d) todas as afirmações são verdadeiras;
  - (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
38. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear tal que  $\text{posto}(T) = 1$ . Prove que *ou*  $T$  é diagonalizável *ou*  $T^2$  é o operador nulo.

39. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear tal que  $T^2 = T$ .
- (a) Prove que se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  então  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ .
- (b) Prove que  $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$  e conclua que  $T$  é diagonalizável.
40. Seja  $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  o operador linear tal que  $T(M) = M^t$ , onde  $M \in M_n(\mathbb{R})$  e  $M^t$  é a transposta de  $M$ . Prove que  $T$  é diagonalizável.
41. Seja  $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  definida por  $T(f(t)) = f(t+1)$  para todo  $f(t) \in P_n(\mathbb{R})$ . É  $T$  diagonalizável? Por que?
42. Seja  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  uma base do espaço vetorial  $V$  e seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que os subespaços  $[v_1, v_2]$  e  $[v_3, v_4]$  são invariantes sob  $T$ .
- (b) Verifique que  $T$  não tem autovetores.
43. Seja  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $[e_1, e_2, e_4]$  é invariante por  $T$ ;  
 (II) o subespaço  $[e_2, e_4]$  é invariante por  $T$ ;  
 (III) o subespaço  $[e_1, e_3]$  é invariante por  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;  
 (b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;  
 (c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;  
 (d) todas as afirmações são falsas;  
 (e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
44. No  $\mathbb{R}^4$  com o produto interno usual considere o subespaço  $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 1)]$ .
- (a) Determine bases ortonormais  $B$  e  $B'$  para  $W$  e  $W^\perp$  respectivamente.
- (b) Sendo  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  o operador linear dado por  $T(v) = \text{proj}_W(v)$ , determine a matriz de  $T$  em relação à base  $B \cup B'$ .
- (c) Quais são os autovalores de  $T$ ? É  $T$  diagonalizável?

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}.$$

6. A resposta não é única. Considere, por exemplo,  $a = -1$ ,  $b = -1$  e  $c = 1$ .

$$7. \text{ Ambas as matrizes são iguais a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & -10 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

10. Ordenando a base canônica de  $M_2(\mathbb{R})$  como  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ , a resposta é a

$$\text{matriz } \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{pmatrix}.$$

12. (a) Uma base de  $\text{Ker}(G \circ T)$  é  $\{(1, 2, 1)\}$  e uma base de  $\text{Ker}(T \circ G)$  é  $\{x + x^2\}$ .

$$(b) [H]_{DC} = \begin{pmatrix} 13 & -19 & 19 \\ 6 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$25. \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 12 + 14^n & -4 + 4 \times 14^n \\ -3 + 3 \times 14^n & 1 + 12 \times 14^n \end{bmatrix}$$

$$26. (2^{-9} + 3 \times 2^{10}, -2^{-9} + 3 \times 2^{10})$$

$$27. \text{ As respostas vão variar. Uma tal } M \text{ é } M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$



28. (a) É diagonalizável. As respostas para  $M$  vão variar. Uma tal  $M$  é  $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Não é diagonalizável. (c) Não é diagonalizável.

(d) É diagonalizável. As respostas para  $M$  vão variar. Uma tal  $M$  é  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

30. (a) autovalores:  $-1$  e  $3$ ;  $V(-1) = [(1, 1, 0), (1, 1, 1)]$  e  $V(3) = [(-1, 1, 0)]$ . (b) Sim.

31. Se  $a, c$  e  $1$  são distintos e  $b$  é qualquer; se  $a = c \neq 1$  e  $b = 0$ ; se  $a \neq 1$  e  $c = 1$  e  $b$  é qualquer.

33. (a) Não. (b) Não. (c) Sim.

44. (a)  $B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}} \right) \right\}$  e  $B' = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}} \right) \right\}$

(b)  $[T]_{B \cup B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

### Respostas dos testes:

5. (a). 8. (b). 11. (a). 13. (c). 21. (b). 23. (a).

29. (d). 32. (b). 34. (e). 35. (c). 37. (a). 43. (c).