

1Q1: Em um espaço vetorial E com produto interno, suponha que S é um subespaço de E de dimensão finita n . Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de S , então

$$\text{proj}_S v = \sum_{i=1}^n \text{proj}_{e_i} v, \quad (v \in E).$$

(II) Sempre existe $\text{proj}_S v$, para todo $v \in E$.

(III) $u \in S$ é solução para o problema da melhor aproximação se e somente se $u \in S$ é solução para o problema da projeção ortogonal.

Podemos afirmar que:

- a) Só (III) é verdadeira.
- b) Só (I) é verdadeira.
- c) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.
- d) As três são verdadeiras.
- e) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

1Q2: Em um espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, consideremos um subespaço S de E e um vetor $u \in E$. Sabendo que $u = 3v + 5w$, com $w \in S$ e $v \in S^\perp$, podemos afirmar que o vetor de S , mais próximo de u é:

- a) $\text{proj}_v u$
- b) $5w$
- c) $\text{proj}_w u$
- d) $-5w$
- e) w

1Q3: Sejam S e T subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial E . Considere as afirmações:

- (I) Se $S \cap T = \{0\}$, então $S \cup T = S + T$;
- (II) Se $S \cap T = \{0\}$, então $\dim(S + T) \neq \dim S + \dim T$;
- (III) $\dim(S + T) \geq \dim S - \dim(S \cap T)$;

Podemos afirmar que:

- a) Somente a afirmação (I) é falsa.
- b) Somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- c) Somente a afirmação (III) é verdadeira.
- d) Todas as afirmações são verdadeiras.
- e) Somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

1Q4: Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $S \subset E$ um subespaço de E .

Seja $T: E \rightarrow E$ a transformação definida por $T(u) = \text{proj}_S u$, $\forall u \in E$. Considere as afirmações:

- (I) $\ker(T) = S^\perp$ e $\text{Im}(T) = S$;
- (II) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base de S e $u \in E$, então

$$T(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k;$$

- (III) $T(u) = u$ se e somente se $u \in S$;

Podemos afirmar que:

- a) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
- b) Todas as afirmações são verdadeiras.
- c) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
- d) Apenas a afirmação (II) é falsa.
- e) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

1Q5: Sejam \mathbb{R}^2 com o produto interno usual e $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$. Supondo $T(1, 0) = (a, b)$, $T(0, 1) = (b, a)$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, consideremos as seguintes afirmações:

- (I) $ab = 0$;
- (II) $a^2 + b^2 = 1$;
- (III) $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Podemos afirmar que:

- a) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.
- b) Apenas (I) é verdadeira.
- c) Todas são verdadeiras.
- d) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
- e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

1Q6: Sejam $E = [\sin x, \cos x, e^x]$ e $T: E \rightarrow E$ o operador linear dado por $T(f) = f'$. Se $B = \{\sin x, \cos x, e^x\}$, então $[T]_B$ é dada por:

- a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1Q7:** Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(p(t)) = (p(1), p(0) - p(1))$, $\forall p(t) \in P_3(\mathbb{R})$. A alternativa falsa é:
- a) $\dim \text{Im}(T) = \dim \ker(T)$.
 - b) $\{T(t), T(t^2 - 1)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$.
 - c) $\{t(t - 1), t^3 - t^2\}$ é uma base de $\ker(T)$.
 - d) T é linear.
 - e) $\{t - 1, t^2 - t, t^3 - 2t^2 + t\}$ é uma base de $\ker(T)$.

- 1Q8:** Em $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, com o produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$, o polinômio de grau menor ou igual a 2 mais próximo de $h(t) = \cos t$ tem raízes:
- a) complexas não reais.
 - b) cujo produto é $\frac{\pi^2}{3}$.
 - c) cuja soma é zero.
 - d) inteiras.
 - e) cuja a soma é $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

- 1Q9:** Considere \mathbb{R}^4 com o produto interno usual e $S \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço dado por

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, y - z + w = 0\}.$$

- Se $u = (0, 0, 3, 4)$ e $\text{proj}_S u = (a, b, c, d)$, então $(a - b + c - d)$ vale:
- a) -2
 - b) 8
 - c) 6
 - d) 2
 - e) 1

1Q10: Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, $A = \{u_1, \dots, u_k\}$ um subconjunto de E e $S = [u_1, \dots, u_k]$. Suponhamos verdadeira a seguinte afirmação:

Para todo $v \in E$, se $\langle v, u_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, então $v = 0$.

Sabendo que $E = S \oplus S^\perp$, podemos afirmar que:

- a) A é um conjunto de geradores de E , mas pode não ser L.I.
- b) A é L.D.
- c) A é um conjunto L.I., mas pode não gerar E .
- d) A é base de E , mas pode não ser um conjunto ortogonal de E .
- e) A é base ortogonal de E .

1Q11: Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação as bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^3 é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Podemos afirmar que:

- a) Não existem a e b reais que tornam T injetora.
- b) T é bijetora para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$.
- c) T é bijetora para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a = b$.
- d) Não existem a e b reais que tornam T sobrejetora.
- e) T é bijetora para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

1Q12: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Considere as afirmações:

- (I) Se T é injetora então $\dim V \leq \dim W$;
- (II) Se $\dim V \leq \dim W$, então T é injetora;
- (III) Se T é sobrejetora, então $\dim V \geq \dim W$.

Podemos afirmar que:

- a) Todas as afirmações são falsas.
- b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

1Q13: Sejam E um espaço vetorial de dimensão 2 e $T: E \rightarrow E$ um operador linear não nulo tal que $T \circ T = 0$. Considere as afirmações:

- (I) $\text{Im}(T) = \ker(T)$;
- (II) $\dim \text{Im}(T) = 2$;
- (III) $\dim \ker T = 1$.

Podemos afirmar que:

- a) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- b) Apenas a afirmação (II) é falsa.
- c) Apenas a afirmação (III) é falsa.
- d) Todas as afirmações são falsas.
- e) Todas as afirmações são verdadeiras.

1Q14: Consideremos as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x - y, x + 2y + 3, x + y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \\ F: \mathcal{C}([0, 1]) &\rightarrow P_1(\mathbb{R}), \quad F(g)(t) = g(0) + g(1)t, \quad \forall g \in \mathcal{C}([0, 1]), \\ &\quad \forall t \in [0, 1]. \\ G: P_3(\mathbb{R}) &\rightarrow P_5(\mathbb{R}), \quad G(p) = p \cdot p' + p''', \quad \forall p \in P_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Podemos afirmar que:

- a) T e F são lineares.
- b) F e G são lineares.
- c) T e G são lineares.
- d) nenhuma é linear.
- e) Só F é linear.

1Q15: Consideremos as seguintes afirmações:

- (I) $M_4(\mathbb{R})$ e $P_{15}(\mathbb{R})$ são isomorfos;
- (II) $[\sin(x), \cos(x), \operatorname{tg}(x)]$ e $P_3(\mathbb{R})$ são isomorfos;
- (III) $[1, \sin^2(x), \cos(2x)]$ e \mathbb{R}^2 são isomorfos.

Podemos afirmar que:

- a) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.
- b) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.
- c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
- d) todas são verdadeiras.
- e) Apenas (I) é verdadeira.

1Q16: Em $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \operatorname{traço}(B^t A)$, considere o subespaço S constituído pelas matrizes simétricas ($C^t = C$). Sabendo que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é base ortogonal de S e que a projeção ortogonal de uma matriz A sobre S é a matriz identidade, podemos afirmar que:

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.
- b) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.
- c) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.
- d) A é a matriz identidade
- e) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

1Q17: Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:

- (I) $(S + T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$;
- (II) Se E tem dimensão finita, então $\dim(S^\perp)^\perp = \dim S$;
- (III) $S^\perp + T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$.

Podemos afirmar que:

- a) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita;
- b) As três afirmações são falsas.
- c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- e) As três afirmações são verdadeiras.

1Q18: Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, -1); \quad T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0);$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1); \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, -1).$$

Então:

- a) T é injetora
- b) $\dim \ker(T) = 3$.
- c) $\dim \ker(T) = 1$.
- d) $\dim \ker(T) = 2$.
- e) $\dim \operatorname{Im}(T) < \dim \ker(T)$.

1Q19: Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a - b + c, b - d, 0), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Então a afirmação correta é:

- a) T é injetora.
- b) $\dim \ker(T) = 3$.
- c) $\dim \ker(T) < \dim \operatorname{Im}(T)$.
- d) T é sobrejetora.
- e) $\ker(T) = [-1 + t^2, t + t^2 + t^3]$

1Q20: Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + c - d, a - b, c - d).$$

A afirmação correta é:

a) $\dim \ker(T) = 3$.

b) $\dim \ker(T) = 1$.

c) $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$.

d) $\ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

e) $\operatorname{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$.