

Nesta prova, o subespaço gerado por vetores  $v_1, \dots, v_n$  é denotado por  $[v_1, \dots, v_n]$ . A base canônica de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  é denotada por  $\text{can}$ . A transposta de uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é denotada por  $A^t$  e o seu traço por  $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ . Tanto a matriz identidade quanto o operador identidade de um espaço vetorial são denotados por  $I$ .

**Q1.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suponha que  $\mathbb{R}^3$  esteja munido do seu produto interno canônico. Se  $T$  é um operador simétrico então  $a + b + c$  é igual a:

- (a) 6;
- (b) 3;
- (c) 5;
- (d) 8;
- (e) 4.

**Q2.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^6$  e seja  $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$  um operador linear. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $[T]_{\text{can}}$  é uma matriz simétrica então  $T$  é diagonalizável;
- (II) se  $\dim(\text{Im}(T))$  é igual a 4 então  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $T$  com multiplicidade algébrica maior do que 1;
- (III) se  $T(1, 2, i, 3, i, 1) = i(1, 2, i, 3, i, 1)$ ,  $[T]_{\text{can}} \in M_6(\mathbb{R})$  e  $\dim(\text{Im}(T))$  é igual a 2 então  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q3.** Considere o espaço vetorial  $V = C([0, 1])$  munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

e o subespaço  $S = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\}$  de  $V$  formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 1. Sabe-se que  $\int_0^1 te^t dt = 1$ . Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , se  $p(t) = a + bt$  é o elemento de  $S$  mais próximo de  $g(t) = e^t$ , então  $a + b$  é igual a:

- (a)  $19e - 28$ ;
- (b)  $-2e + 8$ ;
- (c)  $10e - 28$ ;
- (d)  $4e - 10$ ;
- (e)  $-5e + 8$ .

**Q4.** Considere as bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é invertível;
- (II) 3 é um autovalor de  $T$ ;
- (III) 5 é um autovalor de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q5.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja  $n$  um inteiro positivo. Dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , se  $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , então  $4(a + b + c + d)$  é igual:

- (a)  $12(-1)^n + 3^n$ ;
- (b)  $3(-1)^n + 5 \cdot 3^n$ ;
- (c)  $8(-1)^n + 9 \cdot 3^n$ ;
- (d)  $3(-1)^n + 9 \cdot 3^n$ ;
- (e)  $8(-1)^n + 3^n$ .

**Q6.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear tal que  $v_1 = (1, 1, 1)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  e  $\text{Ker}(T) = [(0, 0, 1)]$ . Pode-se afirmar que  $T(3, -2, 1)$  é igual a:

- (a)  $(3, 7, 7)$ ;
- (b)  $(3, 4, 4)$ ;
- (c)  $(3, 8, 8)$ ;
- (d)  $(3, 5, 5)$ ;
- (e)  $(3, 1, 1)$ .

**Q7.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}$  uma base de  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C}$  uma base de  $M_2(\mathbb{R})$ . Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -7 & -3 & -8 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$  então  $10a - 4b$  é igual a:

- (a) 6;
- (b) 9;
- (c) 8;
- (d) 5;
- (e) 4.

**Q8.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vale que:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no espaço. Dado  $k \in \mathbb{R}$ , uma equação reduzida para a quádrlica de equação:

$$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + k = 0$$

é  $2u^2 + v^2 + w^2 = 8$  se e somente se:

- (a)  $k = -14$ ;
- (b)  $k = -8$ ;
- (c)  $k = -16$ ;
- (d)  $k = -10$ ;
- (e)  $k = -12$ .

**Q9.** Considere o produto interno em  $\mathbb{R}^2$  dado por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2y_1y_2, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (\alpha x + \beta y, \beta x + 3y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) o operador  $T$  é simétrico se e somente se  $\beta = 0$ ;
- (b) o operador  $T$  é simétrico se e somente se  $\alpha - 2\beta - 3 = 0$ ;
- (c) o operador  $T$  é simétrico se e somente se  $\alpha - 2\beta - 4 = 0$ ;
- (d) o operador  $T$  é simétrico;
- (e) o operador  $T$  é simétrico se e somente se  $\alpha + \beta = \sqrt{2}\beta$ .

**Q10.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  tal que  $v_1 = (0, 2, 1)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  e  $v_2 = (1, 2i, 0)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = 3 - 2i$ . Seja  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  a solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  tal que  $X(0) = (2, 4, 1)$ . Temos que o valor da expressão:

$$e^{-\frac{3\pi}{4}} \left( 5x\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3z\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

é igual a:

- (a)  $-9$ ;
- (b)  $-6$ ;
- (c)  $-8$ ;
- (d)  $-4$ ;
- (e)  $-5$ .

**Q11.** Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Dado  $k \in \mathbb{R}$ , considere a cônica de equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + k = 0.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $4k = 1$  então a equação dada define um par de retas paralelas;
- (II) se  $k = 2$  então a equação dada define uma parábola;
- (III) se  $2k = 1$  então a equação dada define uma reta.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Q12.** Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  uma base de  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $[u_1, u_2, u_4]$  é invariante por  $T$ ;
- (II) o subespaço  $[u_2, u_4]$  é invariante por  $T$ ;
- (III) o subespaço  $[u_1, u_3]$  é invariante por  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são falsas;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q13.** Considere as bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 0), (1, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $T(4, 5)$  é igual a:

- (a)  $(-1, 5)$ ;
- (b)  $(2, -1)$ ;
- (c)  $(3, -2)$ ;
- (d)  $(1, -2)$ ;
- (e)  $(1, -1)$ .

**Q14.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de  $T$  é  $p_T(t) = -(t-1)^2(t+2)$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  não é diagonalizável;
- (II)  $T$  é injetor, mas não é sobrejetor;
- (III)  $T$  é invertível.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q15.** Considere o produto interno em  $M_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  um operador linear simétrico cujo polinômio característico é  $p_T(t) = (t-1)^2(t-2)(t-3)$ . Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Suponha que:

$$\text{Ker}(T - \text{I}) = [v_1, v_2], \quad \text{Ker}(T - 2\text{I}) = [v_3], \quad \text{Ker}(T - 3\text{I}) = [v_4],$$

onde:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que  $a + 2b - c$  é igual a:

- (a)  $-4$ ;
- (b)  $3$ ;
- (c)  $-6$ ;
- (d)  $-8$ ;
- (e)  $5$ .

**Q16.** Seja  $X(t) = (x(t), y(t))$  a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição  $x(\frac{\pi}{2}) = 2e^\pi$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = e^\pi$ . Temos que  $4x(0) + 6y(0)$  é igual a:

- (a) 0;
- (b)  $-4$ ;
- (c)  $-1$ ;
- (d)  $-2$ ;
- (e)  $-3$ .