

Nesta prova, o subespaço gerado por vetores v_1, \dots, v_n é denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. A base canônica de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n é denotada por can . A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é denotada por A^t e o seu traço por $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$. Tanto a matriz identidade quanto o operador identidade de um espaço vetorial são denotados por I .

Q1. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Dado $k \in \mathbb{R}$, considere a cônica de equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + k = 0.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se $4k = 1$ então a equação dada define um par de retas paralelas;
- (II) se $k = 2$ então a equação dada define uma parábola;
- (III) se $2k = 1$ então a equação dada define uma reta.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q2. Sejam V um espaço vetorial, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base de V e $T : V \rightarrow V$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço $[u_2, u_4]$ é invariante por T ;
- (II) o subespaço $[u_1, u_2, u_4]$ é invariante por T ;
- (III) o subespaço $[u_1, u_3]$ é invariante por T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q3. Considere o produto interno em $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t - 1)^2(t - 2)(t - 3)$. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Suponha que:

$$\text{Ker}(T - \text{I}) = [v_1, v_2], \quad \text{Ker}(T - 2\text{I}) = [v_3], \quad \text{Ker}(T - 3\text{I}) = [v_4],$$

onde:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que $a + b - 2c$ é igual a:

- (a) 5;
- (b) -8;
- (c) -4;
- (d) -6;
- (e) 3.

Q4. Considere o espaço vetorial $V = C([0, 1])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$$

e o subespaço $S = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\}$ de V formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 1. Sabe-se que $\int_0^1 te^t \, dt = 1$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $p(t) = a + bt$ é o elemento de S mais próximo de $g(t) = e^t$, então $a - b$ é igual a:

- (a) $-5e + 8$;
- (b) $-2e + 8$;
- (c) $19e - 28$;
- (d) $10e - 28$;
- (e) $4e - 10$.

Q5. Considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) T é invertível;
- (II) 5 é um autovalor de T ;
- (III) 3 é um autovalor de T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q6. Considere o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^6 e seja $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$ um operador linear. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se $[T]_{\text{can}}$ é uma matriz simétrica então T é diagonalizável;
- (II) se $\dim(\text{Im}(T))$ é igual a 4 então $\lambda = 0$ é um autovalor de T com multiplicidade algébrica maior do que 1;
- (III) se $T(1, 2, i, 3, i, 1) = i(1, 2, i, 3, i, 1)$, $[T]_{\text{can}} \in M_6(\mathbb{R})$ e $\dim(\text{Im}(T))$ é igual a 2 então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(t) = -(t-1)^2(t+2)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T não é diagonalizável;
- (II) T é invertível;
- (III) T é injetor, mas não é sobrejetor.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, \mathcal{B} uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e \mathcal{C} uma base de $M_2(\mathbb{R})$. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -7 & -3 & -8 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Se $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ então $15a - 6b$ é igual a:

- (a) 9;
- (b) 5;
- (c) 8;
- (d) 6;
- (e) 4.

Q9. Considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(3, 4)$ é igual a:

- (a) $(3, -2)$;
- (b) $(-1, 5)$;
- (c) $(1, -2)$;
- (d) $(2, -1)$;
- (e) $(1, -1)$.

Q10. Considere o produto interno em \mathbb{R}^2 dado por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2y_1y_2, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (\alpha x + \beta y, \beta x + 4y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) o operador T é simétrico se e somente se $\beta = 0$;
- (b) o operador T é simétrico se e somente se $\alpha + \beta = \sqrt{2}\beta$;
- (c) o operador T é simétrico se e somente se $\alpha - 2\beta - 4 = 0$;
- (d) o operador T é simétrico;
- (e) o operador T é simétrico se e somente se $\alpha - 2\beta - 3 = 0$.

Q11. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $v_1 = (0, 2, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ e $v_2 = (1, 2i, 0)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 3 - 2i$. Seja $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ tal que $X(0) = (2, 4, 1)$. Temos que o valor da expressão:

$$e^{-\frac{3\pi}{4}} \left(6x\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{\pi}{4}\right) + 8z\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

é igual a:

- (a) -5 ;
- (b) -4 ;
- (c) -6 ;
- (d) -8 ;
- (e) -9 .

Q12. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^3 . Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suponha que \mathbb{R}^3 esteja munido do seu produto interno canônico. Se T é um operador simétrico então $3a + b + c$ é igual a:

- (a) 8;
- (b) 4;
- (c) 5;
- (d) 6;
- (e) 3.

Q13. Seja $X(t) = (x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $x(\frac{\pi}{2}) = 2e^\pi$, $y(\frac{\pi}{2}) = e^\pi$. Temos que $2x(0) + 4y(0)$ é igual a:

- (a) -3 ;
- (b) -4 ;
- (c) 0 ;
- (d) -2 ;
- (e) -1 .

Q14. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vale que:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no espaço. Dado $k \in \mathbb{R}$, uma equação reduzida para a quádrlica de equação:

$$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + k = 0$$

é $2u^2 + v^2 + w^2 = 10$ se e somente se:

- (a) $k = -8$;
- (b) $k = -14$;
- (c) $k = -12$;
- (d) $k = -10$;
- (e) $k = -16$.

Q15. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $v_1 = (1, 1, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, $v_2 = (0, 1, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ e $\text{Ker}(T) = [(0, 0, 1)]$. Pode-se afirmar que $T(3, 2, 1)$ é igual a:

- (a) $(3, 4, 4)$;
- (b) $(3, 8, 8)$;
- (c) $(3, 5, 5)$;
- (d) $(3, 1, 1)$;
- (e) $(3, 7, 7)$.

Q16. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja n um inteiro positivo. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $4(a + b + c + 2d)$ é igual:

- (a) $3(-1)^n + 5 \cdot 3^n$;
- (b) $8(-1)^n + 9 \cdot 3^n$;
- (c) $12(-1)^n + 3^n$;
- (d) $8(-1)^n + 3^n$;
- (e) $3(-1)^n + 9 \cdot 3^n$.