Resolução da 1ª Prova MAT 2458.

Tipo da prova 01.

Q1: I é verdadeira pois $\forall x \in E$, temos $x = \underbrace{proj_Y x}_{\in Y} + \underbrace{(x - proj_Y x)}_{\in Y^\perp}$

II é verdadeira pois podemos pensar em $T(x) = proj_Y x$ que satisfaz as condições.

III é falso pois: $\dim E = \dim Ker T + \dim Im T$

como $\dim E = 4$ e $\dim Ker T + \dim Im T = 2$ a afirmação é falsa.

Então a resposta é (b).

Q2: A soma é direta quando $U \cap W = (0)$ e portanto $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

Além disso, $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ quando $\dim(U \cap W) = 0$ e neste caso $U \cap W = (0)$ e a soma é direta.

I é verdadeira.

A reunião de uma base de U com uma base de W é sempre um conjunto gerador para U+W.

Assim II é verdadeira.

III também é verdadeira pois,

como $U \cap W = (0)$, se tomamos uma base $B_U = \{u_1, \dots u_n\}$ e uma base $B_W = \{w_1, \dots w_m\}$ respectivamente de U e de W o conjunto $B_U \cup B_W$ é l.i. Vejamos porque:

Suponhamos que existem escalares não todos nulos $\alpha_1 \dots \alpha_n$ e $\beta_1 \dots \beta_m$ tais que

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots \alpha_n u_n + \beta_1 w_1 + \dots \beta_m w_m = 0_V$.

Neste caso, temos $\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n = -\beta_1 w_1 + \dots - \beta_m w_m$ que é um elemento de $U \cap W$. Logo, $\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n = 0$ e $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = 0$ pois $U \cap W = (0)$. Mas neste caso $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$ e $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. Contradição!

A resposta é (d).

Q3 Se $T(v) = proj_S v$ então sabemos que $Im T = S$ e $Ker T = S^\perp$.

Além disso, sabemos que $V = Im T + Ker T = S + S^\perp$ e $S \cap S^\perp = (0)$. (precisa justificar?)

Então a resposta é (d).

Q4, Observe que $\operatorname{Ker} T$ é gerado pelo conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e é fácil ver que é um conjunto l.i.

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

também é um conjunto gerador para $\operatorname{Im} T$. Mas, pelo teorema do Núcleo e da Imagem, este conjunto tem que ser ld (pois $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4 = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T$).

De fato, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$?
(observe além disso que alternativas a, c e e são falsas por dimensões).

então você testar se $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, apenas calculando produto interno dos vetores das bases correspondentes.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$tr\left(\begin{bmatrix} 4-2 & \\ & -2+0.3 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

e também:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1-4+3 = 0.$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -4+4 = 0.$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -1+1 = 0.$$

logo de fato $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ e a resposta correta é (d).

Q5, $T(f) = f + f'$. $T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

$T(f) = 0 \Rightarrow f + f' = 0. \Longrightarrow \operatorname{Ker} T = (0).$

(Por dimensões, concluímos que são ~~os~~ falsas as alternativas b, c, d). Como $\operatorname{Ker} T = (0)$, a alternativa a também é falsa e portanto a alternativa correta é (e).

Q6, A desigualdade de Cauchy-Schwarz diz que

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ e assim $-\|x\|.\|y\| \leq \langle x,y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$

portanto I e II são verdadeiras.

III é verdadeira pois suponha que $\{x,y\}$ fosse ld, então (sem perda de generalidade) podemos supor que $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. pois ambos são não nulos.

então $\langle x,y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \lambda \|y\|. \neq 0$.

A resposta correta é ⓐ.

Q7. $\langle (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)\rangle = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$

Pelas propriedades do determinante,
$\det \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$, e
$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2)$ Assim,

não satisfaz i nem iv. Porém, satisfaz

ii pois $\det \begin{bmatrix} \alpha_1+\gamma_1 & \alpha_2+\gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \beta_2(\alpha_1+\gamma_1) + \beta_1(\alpha_2+\gamma_2)$.

e satisfaz (iii). Alternativa ⓔ.

Q8. $g(t) = at - b$ é a projeção de $f(t) = +\text{sen}\, t$ sobre $P_1(\mathbb{R})$.
Podemos calcular a projeção ou podemos lembrar que $\left(f(t) - \text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} f(t) \right) \perp P_1(\mathbb{R})$.

Então, seja $\{1, t\}$ uma base para $P_1(\mathbb{R})$,

sabemos que $\langle f(t) - \text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} f(t), 1 \rangle =$

$\langle f(t) - \text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} f(t), t \rangle = 0$.

Assim: $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\, t - (at+b)) \cdot 1\, dt = 0$ ①

e $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}\, t - (at+b))\, t\, dt = 0$ ②.

Da equação ① concluimos que
$2\pi \cdot b = 0$ logo $b = 0$.

Lembrando que $\int t \cdot \text{sen}\, t\, dt =$ (por partes)

$-t \cdot \cos t - \int -\cos t\, dt = -t\cos t + \text{sen}\, t$

concluimos da equação 2 que
$2\pi - \frac{a \cdot 2\pi^3}{3} = 0$ ou seja $a = \frac{3}{\pi^2}$.
alternativa ⓑ.

Q9. Vejamos uma base para V
$p(x) = ax^2 + bx + c$ e
$p(1) = p(-1)$ então $a+b+c = a-b+c$.
$b = 0$ uma base para V pode ser $\{1, x^2\}$. Agora uma base ortonormal

(as alternativas b e e são falsas).
Ortonormalizando $\{1, x^2\}$.
$\|1\|^2 = \int_0^1 1\, dx = 1$.

$v_2' = x^2 - \langle x^2, 1\rangle \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$

$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$. $\quad \|v_2'\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{4}{45}$

$v_2 = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}$ alternativa ⓐ.

Q10, I é verdadeira pois seja $x \in E$
e suponha $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$.
como a base é ortonormal, temos que
$\langle x, e_i \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n, e_i \rangle = x_i$.
Se para todo i, $x_i = 0$ então $x = 0_E$.
II não é verdadeira em geral, por exemplo
considere $E = \mathbb{R}^2$, $Y = [(1,1)]$ e
$Z = [(0,1)]$. Então $E = Y \oplus Z$ mas não
são ortogonais.
O exemplo acima serve para verificar que
III não é verdadeira. Alternativa ©.

Q11, Observe que se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é da
forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

é fácil ver que $T(\alpha . A) = \alpha^2 A$ e assim
T não é linear.
Também é fácil ver que as outras funções
são lineares então alternativa ©.

Q12, $T(1,0,0) = (1,2,-1,1)$
$T(0,1,0) = (0,1,0,1)$
$T(0,0,1) = (0,-1,0,1)$.
Então Im T é gerada pelo conjunto
$\{ (1,2,-1,1) \ (0,1,0,1) \ (0,-1,0,1) \}$.

É fácil ver que o conjunto é li, portanto
dim Im T = 3 e pelo teorema do
núcleo e da imagem, dim Ker T = 0.
Alternativa ⓓ.

Q13 Vamos calcular Ker T.

$$\begin{cases} 2a + 5b - c = 0 \\ -a - 3b + c + d = 0 \\ a \quad + 2c + 5d = 0 \\ 3a + 7b - c + d = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a + \quad + 2c + 5d = 0 \\ -3b + 3c + 6d = 0 \\ 5b - 5c - 10d = 0 \\ 7b - 7c - 14d = 0. \end{cases}$$

De onde: $b = c + 2d$
$a = -2c - 5d$ dim Ker T = 2
dim Im T = 2. alternativa ⓓ

Q14, Observe que $(1+t^2) - (t+t^2) = 1 - t$.

Se fixamos uma base para $P_3(\mathbb{R})$, por exemplo
$B = \{1, t, t^2, t^3\}$ e escrevemos os vetores
em coordenadas, temos $V = [(1,0,1,0), (0,1,1,0)]$
e $W = [(0,1,0,0), (0,0,0,1)]$

Se observamos que o conjunto
$\{ (1,0,1,0) \ (0,1,1,0) \ (0,1,0,0) \ (0,0,0,1) \}$ é li,
então temos que dim V+W = 4 e pelo teorema
(dim V+W = dim V + dim W − dim V∩W)

concluimos que $\dim V \cap W = 0$.
alternativa ©.

Q15, Aqui novamente usamos o teorema:
Seja $T: U \to V$ uma transformação linear com $\dim U$ finita.
Então $\dim U = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$.
I é falsa pois se T é injetor, $\dim \ker T = 0$ e $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} T$. Neste caso T tem que ser sobrejetor.
II $\dim M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6$, mas pelo teorema, $\dim \operatorname{Im} T$ é no máximo 5 $(= \dim P_4(\mathbb{R}))$. logo T não pode ser sobrejetora.

III também é falsa pois, se fosse verdadeira poderíamos construir dentro de $\mathbb{R}^n$ (famílias) ou conjuntos l.i. com mais do que n elementos. (Para verificar, considere em $\mathcal{C}[0,1]$ um conjunto l.i. com $n+1$ elementos e seja $S \subset \mathcal{C}[0,1]$ o subespaço gerado por esse conjunto. Então T restrito a S é uma transformação linear injetora e $\dim(\operatorname{Im} T) = n+1$ absurdo!). alternativa ©.

Q16, Se $(x,y) = \alpha(2,3) + \beta(1,1)$ então $\alpha = y - x$ e $\beta = 3x - 2y$.
Assim, $T(x,y) = (y-x)\,T(2,3) + (3x-2y)\,T(1,1)$

$$= (y-x)(4,6) + (3x-2y)(2,-1) = (2x, -9x+8y)$$

$a+b = -7x+8y$ alternativa ⓓ.