MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

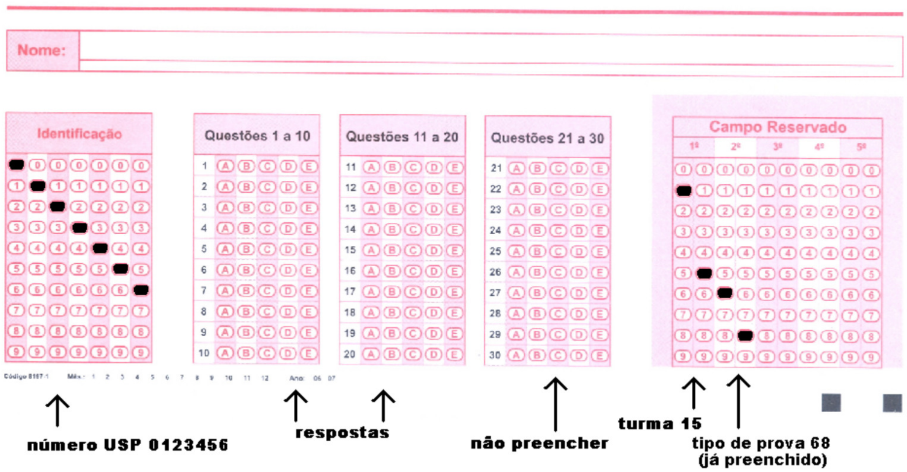
Prova 2 - 16/10/2013

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Professor: ______________________________ **Turma:** ______________

INSTRUÇÕES

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$, então $[v_1, \ldots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

O espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo, é denotado por $P_n(\mathbb{R})$. E se $p \in P_n(\mathbb{R})$, então p' é a sua derivada.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \cdots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

Se λ é um autovalor de um operador linear T, o subespaço formado por todos os autovetores de T associados a λ, mais o vetor nulo, é denominado auto-espaço de T associado a λ.

Questão 1. Acerca de um operador linear T cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t(t^2-1)(t^2-4)$, é correto afirmar que

a. T^2 tem cinco autovalores distintos e é diagonalizável.

b. $T^3 - T$ é diagonalizável e $p_{T^3-T}(t) = -t^3(t-6)(t+6)$.

c. T é invertível e $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2-1)(t^2-\frac{1}{4})$.

d. $T^2 - 4I$ tem quatro autovalores distintos e não é diagonalizável.

e. $p_{T^2}(t) = p_T(t)^2$.

Questão 2. Seja $D\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear derivação, isto é, D é definida por $D(p) = p'$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^3$ e de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1+x, x, x+x^2\},$$

respectivamente. Então, $\mathrm{Ker}(D \circ F)$ é

a. $[(1,-1,1), (1,1,-1)]$.
b. $[(1,1,-1)]$.
c. $[(1,-1,0)]$.
d. $[(0,-1,1)]$.
e. $\{(0,0,0)\}$.

Questão 3. Assinale a afirmação **FALSA** acerca de um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão 2.

a. Se T é diagonalizável, então T^2 também é.
b. Se T não é nulo e $T^2 = T$, então T possui pelo menos um autovalor- distinto de zero.
c. Se T^2 é diagonalizável, então T também é.
d. Se T^2 não possui autovalor, então T também não possui autovalor.
e. Se $T^2 = T$, então T é diagonalizável.

Questão 4. Dizemos que uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^2$ é invariante pelo operador linear $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se $S(x)$ estiver nessa reta sempre que x estiver. A respeito dos operadores lineares L, R, T de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, é correto afirmar que

a. há única reta invariante por L e uma única reta invariante por T.

b. não há retas invariantes por R e exitem duas retas invariantes por T.

c. não há retas invariantes por R e exitem duas retas invariantes por L.

d. não há retas invariantes por T e há uma única reta invariante por L.

e. há uma única reta invariante por R e uma única reta invariante por T.

Questão 5. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que satisfaz

$$T(3,2) = 2(3,2) \quad \text{e} \quad T(1,1) = 3(1,2).$$

Se A denota a matriz de T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$, então o determinante de A é igual a

a. 6

b. 24

c. -18

d. -14

e. 12

Questão 6. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$:

(I) Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Ax = \lambda x$ para algum escalar não nulo λ, então x é um autovetor de A.

(II) Se 0 for um autovalor de A, então as colunas de A formam um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^n$.

(III) Se $n = 2$ e o polinômio característico de A for $t^2 - 1$, então A será diagonalizável e invertível.

Está correto o que se afirma em

a. (I), (II) e (III).

b. (I) e (II), apenas.

c. (II), apenas.

d. (II) e (III), apenas.

e. (I) e (III), apenas.

Questão 7. Suponha que $\mathbb{R}^2$ tenha um produto interno $\langle \, , \, \rangle$ com respeito ao qual a base $B = \{(1,1),(1,2)\}$ seja ortonormal. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x,y) = (\alpha x + \beta y, \beta y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então, T é simétrico com relação ao produto interno $\langle \, , \, \rangle$ se, e somente se,

a. $\alpha + 3\beta = 0$

b. $3\alpha + \beta = 0$

c. $\alpha + 2\beta = 0$

d. $2\alpha + 3\beta = 0$

e. $3\alpha + 2\beta = 0$

Questão 8. Sabendo que a matriz do operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação a uma base de $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

a. existe um valor de b para o qual T possui um único autovalor.
b. se $b = -8$, então T não é diagonalizável.
c. existe um valor de b para o qual T possui um auto-espaço de dimensão 2.
d. não existe valor de b para o qual 0 seja autovalor de T.
e. se $b = 1$, então $T(u) = 6u$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

Questão 9. Seja $T\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e de $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente, dadas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, 2 + 3x\}.$$

Então, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ é igual a

a. $(2a + d) + (-a + b - c)x$
b. $(2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)x$
c. $(2a - c - 2d) + (2a + 3b - 3d)x$
d. $(2a + c) + (b - c - d)x$
e. $(2a + b - 2c) + (3a + 3c - d)x$

Questão 10. Considere a transformação linear $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p)(x) = xp'(x) + 6\int_0^x p(t)dt$$

e a base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

a. $p_1(x) = 2x,\ p_2(x) = 3x + 3x^2$ e $p_3(x) = 4x^2 + 4x^3$

b. $p_1(x) = 6x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = 2x^2 + 2x^3/2$

c. $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2/3$ e $p_3(x) = x^2 + x^3/2$

d. $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3/2$

e. $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3$

Questão 11. Sobre duas matrizes A e B quadradas, do mesmo tamanho, e semelhantes, **NÃO** é correto afirmar que

a. A é invertível, se e somente se, B for invertível.

b. $\det A = \det B$.

c. A e B têm os mesmos autovalores.

d. existe alguma matriz invertível S tal que $B = SAS^{-1}$.

e. A e B têm os mesmos autovetores.

Questão 12. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0 \text{ e } y - w = 0\}.$$

Sabendo que T é diagonalizável, que 3 é um autovalor de T e que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 3I)\big) = 1$, é correto afirmar que o polinômio característico de T é igual a

a. $t(t-3)^2(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$e $\lambda \neq 0$.
b. $t^2(t-3)^2$.
c. $t(t-3)(t-\lambda)(t-\mu)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e algum $\mu \in \mathbb{R}$ tais que$\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 3$ e $\mu \neq 0$.
d. $t^2(t-3)(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$e $\lambda \neq 0$.
e. $t(t^2+1)(t-3)$.

Questão 13. Considere as matrizes A, B e C abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix},$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se C é invertível e satisfaz $C^{-1}AC = B$, então $a + b + c$ é igual a

a. -1
b. 1
c. 2
d. -2
e. 0

Questão 14. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$. Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota a projeção ortogonal sobre S, então **NÃO** é correto afirmar que

a. S é um auto-espaço de T.

b. T é diagonalizável.

c. o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-1)^2$.

d. T possui exatamente dois auto-espaços.

e. a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é invertível.

Questão 15. Seja $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear satisfazendo $\mathrm{Ker}(F) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$. Se $1 + x^2$ e $-x + 2x^2$ são autovetores de F associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente, então $F(1 - x^2)$ é igual a

a. $3 + 2x - x^2$

b. $1 - x + 3x^2$

c. $2 - 2x^2$

d. $3 + 4x - 5x^2$

e. $1 - 2x + 5x^2$

Questão 16. Em um espaço vetorial de dimensão finita, considere um operador linear invertível T com autovetores u e v associados, respectivamente, a autovalores distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\lambda \neq 0$ e u é um autovetor do operador linear T^{-1} associado ao autovalor λ^{-1}.

(II) $u + v$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda + \mu$.

(III) v é um autovetor do operador linear $T^3 + 2T^2$ associado ao autovalor $\mu^3 + 2\mu^2$.

Está correto o que ser afirma em

a. (I), apenas.

b. (II) e (III), apenas.

c. (I) e (II), apenas.

d. (I), (II) e (III).

e. (I) e (III), apenas.

Gabarito do Aluno

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Tipo de prova: ____________

Questão	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					