

MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova 2 - 16/10/2013

Nome: _____ NUSP: _____

Professor: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: _____

Exemplo de preenchimento da folha óptica. A imagem mostra cinco seções: 'Identificação', 'Questões 1 a 10', 'Questões 11 a 20', 'Questões 21 a 30' e 'Campo Reservado'. Cada seção contém uma grade de bolhas para marcar as respostas. Abaixo das seções, há setas apontando para as instruções de preenchimento.

Identificação

Questões 1 a 10

Questões 11 a 20

Questões 21 a 30

Campo Reservado

↑ número USP 0123456

↑ respostas

↑ não preencher

↑ turma 15

↑ tipo de prova 68 (já preenchido)

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

O espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo, é denotado por $P_n(\mathbb{R})$. E se $p \in P_n(\mathbb{R})$, então p' é a sua derivada.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I .

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \dots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

Se λ é um autovalor de um operador linear T , o subespaço formado por todos os autovetores de T associados a λ , mais o vetor nulo, é denominado auto-espaço de T associado a λ .

Questão 1. Dizemos que uma reta que passa pela origem de \mathbb{R}^2 é invariante pelo operador linear $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se $S(x)$ estiver nessa reta sempre que x estiver. A respeito dos operadores lineares L, R, T de \mathbb{R}^2 que satisfazem

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 , é correto afirmar que

- a. há uma única reta invariante por R e uma única reta invariante por T .
- b. não há retas invariantes por R e existem duas retas invariantes por L .
- c. não há retas invariantes por T e há uma única reta invariante por L .
- d. há única reta invariante por L e uma única reta invariante por T .
- e. não há retas invariantes por R e existem duas retas invariantes por T .

Questão 2. Suponha que \mathbb{R}^2 tenha um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com respeito ao qual a base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ seja ortonormal. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x, y) = (\alpha x + \beta y, \beta y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, T é simétrico com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se,

- a. $\alpha + 3\beta = 0$
- b. $3\alpha + \beta = 0$
- c. $\alpha + 2\beta = 0$
- d. $3\alpha + 2\beta = 0$
- e. $2\alpha + 3\beta = 0$

Questão 3. Em um espaço vetorial de dimensão finita, considere um operador linear invertível T com autovetores u e v associados, respectivamente, a autovalores distintos λ e μ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\lambda \neq 0$ e u é um autovetor do operador linear T^{-1} associado ao autovalor λ^{-1} .
- (II) $u + v$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda + \mu$.
- (III) v é um autovetor do operador linear $T^3 + 2T^2$ associado ao autovalor $\mu^3 + 2\mu^2$.

Está correto o que se afirma em

- a. (II) e (III), apenas.
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (I), apenas.
- d. (I) e (II), apenas.
- e. (I), (II) e (III).

Questão 4. Considere as matrizes A , B e C abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix},$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se C é invertível e satisfaz $C^{-1}AC = B$, então $a + b + c$ é igual a

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. -1
- e. -2

Questão 5. Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que \mathcal{B} e \mathcal{C} são as bases de $M_2(\mathbb{R})$ e de $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente, dadas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, 2 + 3x\}.$$

Então, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ é igual a

- a. $(2a + d) + (-a + b - c)x$
- b. $(2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)x$
- c. $(2a + b - 2c) + (3a + 3c - d)x$
- d. $(2a - c - 2d) + (2a + 3b - 3d)x$
- e. $(2a + c) + (b - c - d)x$

Questão 6. Acerca de um operador linear T cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t(t^2 - 1)(t^2 - 4)$, é correto afirmar que

- a. $T^3 - T$ é diagonalizável e $p_{T^3 - T}(t) = -t^3(t - 6)(t + 6)$.
- b. T^2 tem cinco autovalores distintos e é diagonalizável.
- c. $p_{T^2}(t) = p_T(t)^2$.
- d. T é invertível e $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{4})$.
- e. $T^2 - 4I$ tem quatro autovalores distintos e não é diagonalizável.

Questão 7. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear que satisfaz

$$T(3,2) = 2(3,2) \quad \text{e} \quad T(1,1) = 3(1,2).$$

Se A denota a matriz de T com respeito à base canônica de \mathbb{R}^2 , então o determinante de A é igual a

- a. -14
- b. 24
- c. 12
- d. 6
- e. -18

Questão 8. Sabendo que a matriz do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em relação a uma base de \mathbb{R}^2 é

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

- a. se $b = 1$, então $T(u) = 6u$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- b. existe um valor de b para o qual T possui um auto-espaço de dimensão 2.
- c. não existe valor de b para o qual 0 seja autovalor de T .
- d. existe um valor de b para o qual T possui um único autovalor.
- e. se $b = -8$, então T não é diagonalizável.

Questão 9. Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0 \text{ e } y - w = 0\}.$$

Sabendo que T é diagonalizável, que 3 é um autovalor de T e que $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$, é correto afirmar que o polinômio característico de T é igual a

- a. $t^2(t - 3)^2$.
- b. $t(t^2 + 1)(t - 3)$.
- c. $t(t - 3)^2(t - \lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$ e $\lambda \neq 0$.
- d. $t(t - 3)(t - \lambda)(t - \mu)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e algum $\mu \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 3$ e $\mu \neq 0$.
- e. $t^2(t - 3)(t - \lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$ e $\lambda \neq 0$.

Questão 10. Sobre duas matrizes A e B quadradas, do mesmo tamanho, e semelhantes, **NÃO** é correto afirmar que

- a. existe alguma matriz invertível S tal que $B = SAS^{-1}$.
- b. $\det A = \det B$.
- c. A e B têm os mesmos autovalores.
- d. A e B têm os mesmos autovetores.
- e. A é invertível, se e somente se, B for invertível.

Questão 11. Seja $F: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear satisfazendo $\text{Ker}(F) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$. Se $1 + x^2$ e $-x + 2x^2$ são autovetores de F associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente, então $F(1 - x^2)$ é igual a

- a. $1 - 2x + 5x^2$
- b. $2 - 2x^2$
- c. $1 - x + 3x^2$
- d. $3 + 2x - x^2$
- e. $3 + 4x - 5x^2$

Questão 12. Assinale a afirmação **FALSA** acerca de um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão 2.

- a. Se T é diagonalizável, então T^2 também é.
- b. Se $T^2 = T$, então T é diagonalizável.
- c. Se T^2 é diagonalizável, então T também é.
- d. Se T^2 não possui autovalor, então T também não possui autovalor.
- e. Se T não é nulo e $T^2 = T$, então T possui pelo menos um autovalor-distinto de zero.

Questão 13. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual e seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota a projeção ortogonal sobre S , então **NÃO** é correto afirmar que

- a. T possui exatamente dois auto-espacos.
- b. T é diagonalizável.
- c. a matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{R}^3 é invertível.
- d. o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t - 1)^2$.
- e. S é um auto-espaço de T .

Questão 14. Considere a transformação linear $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p)(x) = xp'(x) + 6 \int_0^x p(t)dt$$

e a base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

- a. $p_1(x) = 3x$, $p_2(x) = x/3 + x^2/3$ e $p_3(x) = x^2 + x^3/2$
- b. $p_1(x) = 6x$, $p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = 2x^2 + 2x^3/2$
- c. $p_1(x) = 3x$, $p_2(x) = x/3 + x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3/2$
- d. $p_1(x) = 3x$, $p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3$
- e. $p_1(x) = 2x$, $p_2(x) = 3x + 3x^2$ e $p_3(x) = 4x^2 + 4x^3$

Questão 15. Seja $D: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear derivação, isto é, D é definida por $D(p) = p'$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[F]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que \mathcal{B} e \mathcal{C} são as bases de \mathbb{R}^3 e de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, x, x + x^2\},$$

respectivamente. Então, $\text{Ker}(D \circ F)$ é

- a. $[(1, -1, 0)]$.
- b. $[(1, 1, -1)]$.
- c. $[(0, -1, 1)]$.
- d. $\{(0, 0, 0)\}$.
- e. $[(1, -1, 1), (1, 1, -1)]$.

Questão 16. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$:

- (I) Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Ax = \lambda x$ para algum escalar não nulo λ , então x é um autovetor de A .
- (II) Se 0 for um autovalor de A , então as colunas de A formam um conjunto linearmente dependente em \mathbb{R}^n .
- (III) Se $n = 2$ e o polinômio característico de A for $t^2 - 1$, então A será diagonalizável e invertível.

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (II), apenas.
- c. (I) e (III), apenas.
- d. (II) e (III), apenas.
- e. (I), (II) e (III).

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	<input type="checkbox"/>				
2	<input type="checkbox"/>				
3	<input type="checkbox"/>				
4	<input type="checkbox"/>				
5	<input type="checkbox"/>				
6	<input type="checkbox"/>				
7	<input type="checkbox"/>				
8	<input type="checkbox"/>				
9	<input type="checkbox"/>				
10	<input type="checkbox"/>				
11	<input type="checkbox"/>				
12	<input type="checkbox"/>				
13	<input type="checkbox"/>				
14	<input type="checkbox"/>				
15	<input type="checkbox"/>				
16	<input type="checkbox"/>				