

# MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova 2 - 16/10/2013

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_

Professor: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

## INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: \_\_\_\_\_

Exemplo de preenchimento da folha óptica. A imagem mostra cinco seções: 'Identificação', 'Questões 1 a 10', 'Questões 11 a 20', 'Questões 21 a 30' e 'Campo Reservado'. Cada seção contém uma grade de bolhas para marcar as respostas. Abaixo das seções, há setas apontando para as instruções de preenchimento.

Identificação

Questões 1 a 10

Questões 11 a 20

Questões 21 a 30

Campo Reservado

↑ número USP 0123456

↑ respostas

↑ não preencher

↑ turma 15

↑ tipo de prova 68 (já preenchido)

**Notações:** Nesta prova, se  $V$  é um espaço vetorial e  $v_1, \dots, v_n \in V$ , então  $[v_1, \dots, v_n]$  denota o subespaço vetorial de  $V$  gerado por  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

O espaço vetorial de todos os polinômios de grau  $\leq n$ , incluindo o polinômio nulo, é denotado por  $P_n(\mathbb{R})$ . E se  $p \in P_n(\mathbb{R})$ , então  $p'$  é a sua derivada.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por  $I$ .

Se  $T$  é um operador linear em um espaço vetorial e  $n$  é um inteiro positivo, então  $T^n$  denota o operador linear composto  $T \circ T \circ \dots \circ T$ , em que  $T$  ocorre  $n$  vezes.

Se  $\lambda$  é um autovalor de um operador linear  $T$ , o subespaço formado por todos os autovetores de  $T$  associados a  $\lambda$ , mais o vetor nulo, é denominado auto-espaço de  $T$  associado a  $\lambda$ .

**Questão 1.** Sabendo que a matriz do operador linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em relação a uma base de  $\mathbb{R}^2$  é

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

em que  $b \in \mathbb{R}$ , é correto afirmar que

- a. se  $b = -8$ , então  $T$  não é diagonalizável.
- b. se  $b = 1$ , então  $T(u) = 6u$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ .
- c. existe um valor de  $b$  para o qual  $T$  possui um auto-espaço de dimensão 2.
- d. não existe valor de  $b$  para o qual 0 seja autovalor de  $T$ .
- e. existe um valor de  $b$  para o qual  $T$  possui um único autovalor.

**Questão 2.** Dizemos que uma reta que passa pela origem de  $\mathbb{R}^2$  é invariante pelo operador linear  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se  $S(x)$  estiver nessa reta sempre que  $x$  estiver. A respeito dos operadores lineares  $L, R, T$  de  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , é correto afirmar que

- a. há uma única reta invariante por  $R$  e uma única reta invariante por  $T$ .
- b. não há retas invariantes por  $T$  e há uma única reta invariante por  $L$ .
- c. há única reta invariante por  $L$  e uma única reta invariante por  $T$ .
- d. não há retas invariantes por  $R$  e existem duas retas invariantes por  $T$ .
- e. não há retas invariantes por  $R$  e existem duas retas invariantes por  $L$ .

**Questão 3.** Em um espaço vetorial de dimensão finita, considere um operador linear invertível  $T$  com autovetores  $u$  e  $v$  associados, respectivamente, a autovalores distintos  $\lambda$  e  $\mu$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $\lambda \neq 0$  e  $u$  é um autovetor do operador linear  $T^{-1}$  associado ao autovalor  $\lambda^{-1}$ .
- (II)  $u + v$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .
- (III)  $v$  é um autovetor do operador linear  $T^3 + 2T^2$  associado ao autovalor  $\mu^3 + 2\mu^2$ .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I), apenas.
- c. (I), (II) e (III).
- d. (I) e (III), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

**Questão 4.** Considere  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno usual e seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ . Se  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  denota a projeção ortogonal sobre  $S$ , então **NÃO** é correto afirmar que

- a.  $T$  é diagonalizável.
- b. a matriz de  $T$  em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é invertível.
- c.  $T$  possui exatamente dois auto-espacos.
- d. o polinômio característico de  $T$  é  $p(t) = -t(t - 1)^2$ .
- e.  $S$  é um auto-espaço de  $T$ .

**Questão 5.** Considere a transformação linear  $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  definida por

$$T(p)(x) = xp'(x) + 6 \int_0^x p(t)dt$$

e a base  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$ . Se  $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  é uma base de  $P_3(\mathbb{R})$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

- a.  $p_1(x) = 3x$ ,  $p_2(x) = x + 3x^2$  e  $p_3(x) = x^2/2 + x^3$
- b.  $p_1(x) = 6x$ ,  $p_2(x) = x + 3x^2$  e  $p_3(x) = 2x^2 + 2x^3/2$
- c.  $p_1(x) = 3x$ ,  $p_2(x) = x/3 + x^2/3$  e  $p_3(x) = x^2 + x^3/2$
- d.  $p_1(x) = 3x$ ,  $p_2(x) = x/3 + x^2$  e  $p_3(x) = x^2/2 + x^3/2$
- e.  $p_1(x) = 2x$ ,  $p_2(x) = 3x + 3x^2$  e  $p_3(x) = 4x^2 + 4x^3$

**Questão 6.** Assinale a afirmação **FALSA** acerca de um operador linear  $T$  em um espaço vetorial de dimensão 2.

- a. Se  $T^2$  não possui autovalor, então  $T$  também não possui autovalor.
- b. Se  $T$  é diagonalizável, então  $T^2$  também é.
- c. Se  $T$  não é nulo e  $T^2 = T$ , então  $T$  possui pelo menos um autovalor distinto de zero.
- d. Se  $T^2$  é diagonalizável, então  $T$  também é.
- e. Se  $T^2 = T$ , então  $T$  é diagonalizável.

**Questão 7.** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear que satisfaz

$$T(3,2) = 2(3,2) \quad \text{e} \quad T(1,1) = 3(1,2).$$

Se  $A$  denota a matriz de  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , então o determinante de  $A$  é igual a

- a. 24
- b. -14
- c. 6
- d. -18
- e. 12

**Questão 8.** Seja  $n$  um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ :

- (I) Se  $x \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $Ax = \lambda x$  para algum escalar não nulo  $\lambda$ , então  $x$  é um autovetor de  $A$ .
- (II) Se 0 for um autovalor de  $A$ , então as colunas de  $A$  formam um conjunto linearmente dependente em  $\mathbb{R}^n$ .
- (III) Se  $n = 2$  e o polinômio característico de  $A$  for  $t^2 - 1$ , então  $A$  será diagonalizável e invertível.

Está correto o que se afirma em

- a. (I), (II) e (III).
- b. (II) e (III), apenas.
- c. (I) e (II), apenas.
- d. (II), apenas.
- e. (I) e (III), apenas.

**Questão 9.** Suponha que  $\mathbb{R}^2$  tenha um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  com respeito ao qual a base  $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$  seja ortonormal. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por

$$T(x, y) = (\alpha x + \beta y, \beta y),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Então,  $T$  é simétrico com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se, e somente se,

- a.  $\alpha + 3\beta = 0$
- b.  $3\alpha + 2\beta = 0$
- c.  $2\alpha + 3\beta = 0$
- d.  $3\alpha + \beta = 0$
- e.  $\alpha + 2\beta = 0$

**Questão 10.** Acerca de um operador linear  $T$  cujo polinômio característico é  $p_T(t) = -t(t^2 - 1)(t^2 - 4)$ , é correto afirmar que

- a.  $p_{T^2}(t) = p_T(t)^2$ .
- b.  $T^2$  tem cinco autovalores distintos e é diagonalizável.
- c.  $T$  é invertível e  $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{4})$ .
- d.  $T^2 - 4I$  tem quatro autovalores distintos e não é diagonalizável.
- e.  $T^3 - T$  é diagonalizável e  $p_{T^3 - T}(t) = -t^3(t - 6)(t + 6)$ .

**Questão 11.** Seja  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  um operador linear tal que

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0 \text{ e } y - w = 0\}.$$

Sabendo que  $T$  é diagonalizável, que 3 é um autovalor de  $T$  e que  $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$ , é correto afirmar que o polinômio característico de  $T$  é igual a

- a.  $t(t - 3)^2(t - \lambda)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda \neq 3$  e  $\lambda \neq 0$ .
- b.  $t(t - 3)(t - \lambda)(t - \mu)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  e algum  $\mu \in \mathbb{R}$  tais que  $\lambda \neq 3$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 3$  e  $\mu \neq 0$ .
- c.  $t^2(t - 3)^2$ .
- d.  $t(t^2 + 1)(t - 3)$ .
- e.  $t^2(t - 3)(t - \lambda)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda \neq 3$  e  $\lambda \neq 0$ .

**Questão 12.** Seja  $F: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  uma transformação linear satisfazendo  $\text{Ker}(F) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$ . Se  $1 + x^2$  e  $-x + 2x^2$  são autovetores de  $F$  associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente, então  $F(1 - x^2)$  é igual a

- a.  $1 - 2x + 5x^2$
- b.  $2 - 2x^2$
- c.  $3 + 4x - 5x^2$
- d.  $1 - x + 3x^2$
- e.  $3 + 2x - x^2$

**Questão 13.** Considere as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se  $C$  é invertível e satisfaz  $C^{-1}AC = B$ , então  $a + b + c$  é igual a

- a. 2
- b. 0
- c. -2
- d. -1
- e. 1

**Questão 14.** Seja  $D: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear derivação, isto é,  $D$  é definida por  $D(p) = p'$ , para todo  $p \in P_2(\mathbb{R})$ , e seja  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que

$$[F]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  são as bases de  $\mathbb{R}^3$  e de  $P_2(\mathbb{R})$  dadas por

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, x, x + x^2\},$$

respectivamente. Então,  $\text{Ker}(D \circ F)$  é

- a.  $[(1, 1, -1)]$ .
- b.  $[(1, -1, 1), (1, 1, -1)]$ .
- c.  $[(1, -1, 0)]$ .
- d.  $[(0, -1, 1)]$ .
- e.  $\{(0, 0, 0)\}$ .

**Questão 15.** Sobre duas matrizes  $A$  e  $B$  quadradas, do mesmo tamanho, e semelhantes, **NÃO** é correto afirmar que

- a.  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores.
- b. existe alguma matriz invertível  $S$  tal que  $B = SAS^{-1}$ .
- c.  $A$  é invertível, se e somente se,  $B$  for invertível.
- d.  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovetores.
- e.  $\det A = \det B$ .

**Questão 16.** Seja  $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que  $B$  e  $C$  são as bases de  $M_2(\mathbb{R})$  e de  $P_1(\mathbb{R})$ , respectivamente, dadas por

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad C = \{1 + x, 2 + 3x\}.$$

Então,  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$  é igual a

- a.  $(2a + c) + (b - c - d)x$
- b.  $(2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)x$
- c.  $(2a - c - 2d) + (2a + 3b - 3d)x$
- d.  $(2a + d) + (-a + b - c)x$
- e.  $(2a + b - 2c) + (3a + 3c - d)x$

# Gabarito do Aluno

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_

Tipo de prova: \_\_\_\_\_

Questão	a	b	c	d	e
1	<input type="checkbox"/>				
2	<input type="checkbox"/>				
3	<input type="checkbox"/>				
4	<input type="checkbox"/>				
5	<input type="checkbox"/>				
6	<input type="checkbox"/>				
7	<input type="checkbox"/>				
8	<input type="checkbox"/>				
9	<input type="checkbox"/>				
10	<input type="checkbox"/>				
11	<input type="checkbox"/>				
12	<input type="checkbox"/>				
13	<input type="checkbox"/>				
14	<input type="checkbox"/>				
15	<input type="checkbox"/>				
16	<input type="checkbox"/>				