

MAT2458 — Álgebra Linear para Engenharia II

Prova 3 — 27/11/2013

Notações:

- Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.
- Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \dots \circ T$, em que T ocorre n vezes.
- O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I .
- Se λ é um escalar e T , um operador linear em um espaço vetorial, denota-se $V(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I)$. Quando λ é um autovalor de T , $V(\lambda)$ chama-se autoespaço de T associado a λ .

Questão 1. Se A é uma matriz de $M_2(\mathbb{R})$ que satisfaz

$$A \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

então é correto afirmar que A é igual a

- a. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
- c. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$
- d. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Solução. Uma base ortonormal de autovetores é $\{u, v\}$, onde

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, 2) = (\sqrt{1/3}, \sqrt{2/3}) \in V(2) \quad \text{e}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, -1) = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}) \in V(3)$$

e portanto temos a fórmula $A = MDM^{-1}$, onde as colunas de M são as coordenadas de u e v (na base canônica), D é a matriz diagonal associada aos valores 2 e 3, e $M^{-1} = M^t$ porque M é matriz de mudança de base entre bases ortonormais. Logo **b.** é verdadeira.

Questão 2. Sabendo que $(1, -1 - i)$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $3 + i$, pode-se afirmar corretamente que as soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ são da forma

- a. $ae^{3t}(\cos t - \sin t) + be^{3t}(\cos t + \sin t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- b. $ae^{3t}(\cos t, \cos t) + be^{3t}(\sin t, -\sin t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- c. $ae^{3t}(-\cos t + \sin t, -\cos t) + be^{3t}(-\cos t + \sin t, \cos t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- d. $ae^{3t}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$, com $a \in \mathbb{R}$.
- e. $ae^{3t}(\cos t, -\cos t + \sin t) + be^{3t}(\sin t, -\sin t - \cos t)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Questão 3. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, e seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear de matriz A na base $\mathcal{B}$. É correto afirmar que

- a. T tem um único autovalor.
- b. T é simétrico.
- c. existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T .
- d. T é diagonalizável, mas pode não existir uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T .
- e. T não é diagonalizável.

Solução. Como $\lambda = 3 + i$ é autovalor e a matriz é real, $\bar{\lambda} = 3 - i$ também é autovalor. Além disso

$$V(3 - i) = [(\bar{1}, -1 - \bar{i})] = [(1, -1 + i)].$$

Como a matriz é de ordem 2 não existem outros autovalores, e o espaço das soluções do sistema tem dimensão 2

A solução geral **complexa** do sistema associada ao autovetor $(1, -1 - i)$ é

$$X_0(t) = e^{(3+i)t}(1, -1 - i).$$

As duas soluções **reais** do sistema associadas aos autovetores $(1, -1 - i)$ e $(1, -1 + i)$ são $\Re(X_0)$ e $\Im(X_0)$, e elas formam uma base do espaço das soluções.

Como

$$\begin{aligned} X_0(t) &= (e^{(3+i)t}, e^{(3+i)t}(-1 - i)) \\ &= (e^{3t} \cos t + ie^{3t} \sin t, e^{3t}[\cos t + i \sin t](-1 - i)) \\ &= (e^{3t} \cos t + ie^{3t} \sin t, e^{3t}(-\cos t + \sin t) + ie^{3t}(-\cos t - \sin t)) \end{aligned}$$

temos

$$\Re(X_0) = e^{3t}(\cos t, -\cos t + \sin t) \text{ e}$$

$$\Im(X_0) = e^{3t}(\sin t, -\cos t - \sin t).$$

Assim, toda solução X do sistema é da forma $a\Re(X_0) + b\Im(X_0)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, portanto **e.** é a alternativa correta.

Solução. Sendo A simétrica, ela é diagonalizável. De fato o operador de matriz A na base canônica é simétrico, logo diagonalizável, logo qualquer matriz que o representa (por exemplo A) é diagonalizável. Porém, como $\mathcal{B}$ é uma base não necessariamente ortonormal, não precisa existir uma base ortonormal onde a matriz de T é simétrica, ou seja, não é necessariamente verdadeiro que T seja simétrico ou equivalentemente, que T seja diagonalizável em base ortonormal. Assim **d.** é a única alternativa verdadeira.

Questão 4. Seja n um inteiro positivo. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, de um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ e de um vetor $v \in \mathbb{C}^n$.

- (I) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ , então $\bar{v}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\bar{\lambda}$.
- (II) Se λ é um autovalor de A , então $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A .
- (III) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e todos seus autovalores são reais, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Pode-se afirmar corretamente que

- a. apenas (II) e (III) são verdadeiras.
- b. apenas (I) e (III) são verdadeiras.
- c. (I), (II) e (III) são verdadeiras.
- d. apenas (I) e (II) são verdadeiras.
- e. (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 5. Seja n um inteiro positivo e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz não nula diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. A respeito do sistema linear de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é **FALSO** afirmar que

- a. se o sistema admite soluções complexas, ele também admite soluções reais.
- b. existem n funções $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que toda solução do sistema é uma combinação linear de $f_1, \dots, f_n$.
- c. dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $X(t)$ tal que $X(0) = X_0$.
- d. a soma de duas soluções do sistema ainda é solução do sistema.
- e. existem soluções não nulas do tipo $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, onde $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são funções polinomiais.

Solução. (I) Verdadeira. A demonstração deste fato foi feita durante as aulas e encontra-se no texto complementar sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares.

- (II) Falsa. Considere por exemplo a matriz complexa $A = \begin{bmatrix} i & -i & 1 \\ -1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$. Seu polinômio característico é $p_A(\lambda) = -\lambda(1+i\lambda)^2$. Claramente $1+i$ é raiz de p_A e portanto autovalor de A enquanto seu conjugado $1-i$ não é raiz de p_A e portanto não é autovalor de A . Obs.: se A tem entradas complexas e p_A tem coeficientes reais então quando λ é autovalor e $v \in V(\lambda)$ então $\bar{\lambda}$ é autovalor, mas não podemos garantir que $\bar{v} \in V(\bar{\lambda})$.

- (III) Verdadeira. As entradas de A são reais e seus autovalores λ são reais. Deste modo o sistema $(A - \lambda I)x = 0$, para determinar o autoespaço $V(\lambda)$ terá soluções reais, pois o escalonamento de matrizes só utiliza a soma e multiplicação, que são operações fechadas em $\mathbb{R}$.

Resposta certa: alternativa **b**.

Solução. A solução geral do sistema é a combinação linear $C_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} u_n$, onde λ_i é autovalor de A e $u_i \in V(\lambda_i)$ e $\{u_1, \dots, u_n\}$ são linearmente independentes.

A alternativa falsa é **e**., pois se A não possuir nenhum autovalor nulo, $X(t)$ tem coordenadas polinomiais se e somente se $C_k = 0$, ou seja, elas são polinômios nulos. Obs.: Em geral, se A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e não nula, então existe ao menos um autovalor real λ de A não nulo. Nesse caso existe uma solução da forma $X(t) = e^{\lambda t} u$, com $u \in V(\lambda)$, que não é polinomial. Qualquer outra solução é uma combinação linear desta solução com outras da mesma forma (possivelmente constantes, para autovalores nulos). A única possibilidade de obter coordenadas polinomiais seria anulando o coeficiente de $e^{\lambda t} u$, obtendo soluções constantes.

A alternativa **a**. é verdadeira pois existem soluções reais do sistema e qualquer múltiplo complexo de uma delas também é solução.

As alternativas **b**. e **d**. são verdadeiras pois o conjunto de soluções de tal sistema é um subespaço vetorial de dimensão n de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

A alternativa **c**. é verdadeira pois fazendo $t = 0$ na solução geral temos que $C_1 u_1 + \dots + C_n u_n = X(0) = X_0$ tem solução única para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$, determinando assim as constantes na combinação linear e portanto a única solução do sistema satisfazendo a condição inicial dada.

Questão 6. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ seja simétrica. Suponha que $\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 0, 1)]$ e que $\text{Ker}(T) = [(1, 0, -1)]$. É correto afirmar que

- a. existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(1, 1, 0) = \lambda(1, 1, 0)$.
- b. $T(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$.
- c. $T(2, 0, 0) = (2, 1, 0)$.
- d. existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(0, 1, 0) = \lambda(0, 1, 0)$.
- e. $T(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

Questão 7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a cônica Γ de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

com respeito a um sistema de coordenadas de E^2 com origem O e base B ortonormal. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

é correto afirmar que uma equação reduzida de Γ é

- a. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'} \right\}$.
- b. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'} \right\}$.
- c. impossível de ser determinada a partir dos dados da questão.
- d. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'} \right\}$.
- e. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{B'} \right\}$.

Solução. sendo T simétrico (porque a matriz A de T é simétrica na base canônica que é ortonormal), T é diagonalizável (ou seja $\mathbb{R}^3$ é a soma direta dos autoespaços) e os autoespaços são ortogonais. Como $V(0)$ e $V(2)$ têm dimensão 1, existe um terceiro autovalor, λ , diferente de 0 e 2. Além disso $V(\lambda)$ é a reta ortogonal ao plano que contém $V(0) = [(1, 0, -1)]$ e $V(2) = [(1, 0, 1)]$, logo $V(\lambda) = [(0, 1, 0)]$. Assim **d.** é verdadeira.

a. é falsa porque não existe outro autoespaço além que $V(0)$, $V(2)$ e $V(\lambda) = [(0, 1, 0)]$. **b.** significa que $(1, 0, -1) \in V(2)$, falsa. **c.** e **e.** são falsas porque sabendo $T(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$ e $T(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$ e fazendo a soma, tem-se $T(2, 0, 0) = (2, 0, 2)$.

Solução. Pelos coeficientes da matriz diagonal, a resposta só pode ser **a.** ou **b.**. Além disso a base do sistema de coordenadas da equação reduzida é dada pelas colunas da matriz M da fórmula $A = MDM^{-1}$, ou seja $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ correspondendo a $\lambda = 3$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ correspondendo a $\lambda = -1$. Logo a resposta certa é a alternativa **a.**

Questão 8. Considere a superfície quádrlica de equação

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^3 de base ortonormal. Então, existe um sistema coordenadas em E^3 de base ortonormal, com respeito ao qual a quádrlica tem equação da forma

- a. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- b. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b < 0$.
- c. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b > 0$.
- d. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c < 0, d \in \mathbb{R}$.
- e. $z' = a(x')^2$, com $a \in \mathbb{R}$.

Questão 9. Seja n um inteiro positivo. Assinale a alternativa **FALSA** sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica.

- a. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ são tais que $Av_1 = v_1$ e $Av_2 = 2v_2$, então v_1 e v_2 são ortogonais.
- b. Existe uma matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz real diagonal.
- c. A matriz A tem n autovalores distintos, e existe um conjunto ortonormal formado por n autovetores de A .
- d. A soma das dimensões dos autoespaços de A é igual a n .
- e. Todos os autovalores de A são reais.

Questão 10. Seja $\Sigma = (O, v_1, v_2)$ um sistema de coordenadas de E^2 em que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V^2 . Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$$

com respeito ao sistema Σ . Então, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V^2 tal que Γ tem uma equação reduzida com respeito ao sistema de coordenadas (O, e_1, e_2) , em que

- a. $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma hipérbole.
- b. $e_1 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma hipérbole.
- c. $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma parábola.
- d. $e_1 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma elipse.
- e. $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma elipse.

Solução. A matriz simétrica associada a esta superfície quádrlica é

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, cujos autovalores são $-5, 2$ e 5 . Deste modo sabemos que a equação reduzida na forma da alternativa **d.**.

A alternativa falsa é **c.**, pois a matriz A pode ter autovalores com multiplicidade algébrica maior que 1. No caso dela ser simétrica a teoria garante que nesse caso as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem e que autoespaços distintos são ortogonais. Aplicando o processo de Gram-Schmidt a uma base de cada autoespaço obtemos uma base ortonormal de autovetores de A para $\mathbb{R}^n$.

As afirmações das alternativas **a.**, **b.**, **d.** e **e.** são verdadeiras devido ao fato de A ser simétrica e portanto diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ com base ortonormal de autovetores, como dito acima.

Solução. A matriz simétrica associada é $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ de autovalores 1 e 6. Sendo os autovalores positivos, a cônica será elipse, um ponto, ou vazia, logo **a.**, **b.** e **c.** são falsas. Os autoespaços são $V(1) = [(1, 2)]$ e $V(6) = [(2, -1)]$ e indicam as direções dos vetores de base do sistema da equação reduzida. A resposta correta é a alternativa **e.**, pois somente nela o vetor e_1 pertence a um dos autoespaços.

Questão 11. Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tem polinômio

característico igual a $(1 - t)(t^2 - 4t + 13)$, pode-se afirmar corretamente que

- a. $\dim V(2 + 3i) = 2$.
- b. A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.
- c. $\dim V(1) = 2$.
- d. os autovalores de A são todos reais, mas A não é diagonalizável.
- e. os autovalores de A são todos reais, e A é diagonalizável.

Questão 12. Considere as seguintes afirmações sobre um operador linear T de $\mathbb{R}^4$ que tenha o polinômio $(t^2 + 4)(t - 2)(t + 2)$ como polinômio característico:

- (I) T é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- (II) T^4 é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- (III) 4 é o único autovalor de T^2 .

Está correto o que se afirma em

- a. (I), (II) e (III).
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (I) e (II), apenas.
- d. (II), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 13. Acerca de uma matriz $A \in M_5(\mathbb{R})$ que tem polinômio característico igual a $-t(t^2 + 1)(t - a)(t - b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar corretamente que

- a. se $a \neq b$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- b. se $a = b$ e $a \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$.
- c. se $0, a, b$ são dois a dois distintos, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- d. se $a = b = 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 2, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.
- e. se $a = 0$, $b \neq 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 1, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Em vista do polinômio característico fornecido concluímos que os autovalores de A são $1, 2 + 3i$ e $2 - 3i$.

Como a multiplicidade algébrica de um autovalor é sempre maior ou igual à sua multiplicidade geométrica (sempre positiva), temos nesse caso que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$ e a multiplicidade geométrica de cada autovalor é 1.

A única alternativa correta é **b**.

Solução. (I) Falsa, pois os autovalores complexos de A são $2, -2, 2i, -2i$. Como existem autovalores complexos não reais, A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(II) Verdadeira, pois se D é a matriz diagonal complexa seme-

lhante a A , $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$, vemos que $D^4 = 16I$.

Logo D^4 é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e como D^4 é a matriz de T^4 , T^4 é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ (na verdade $T^4 = 16I$).

(III) Falsa, pois como $2, -2, 2i, -2i$ são autovalores de T , então $2^2, (-2)^2, (2i)^2, (-2i)^2$ são autovalores de T^2 . Logo T^2 tem 4 e -4 como autovalores.

Resposta certa: alternativa **d**.

Solução. Em vista do polinômio característico fornecido temos que os autovalores de A são $0, i, -i, a$ e b , com $a, b \in \mathbb{R}$. Certamente A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, eliminando as alternativas **a** e **b**.

Para garantir que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ precisamos de informação sobre a multiplicidade geométrica de seus autovalores reais. Isso só é fornecido, de maneira positiva, na alternativa **c**, na qual concluímos que as multiplicidade geométrica e algébrica dos autovalores reais é 1. Nas demais alternativas essa informação não pode ser obtida.

Resposta certa: **c**.

Questão 14. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja T um operador linear de $\mathbb{R}^3$. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vetores não nulos tais que $\{v, w\}$ seja linearmente independente. Suponha que $V(2) = [u]$ e $V(3) = [v, w]$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se $\langle u, v + w \rangle \neq 0$, então T não é simétrico.
- (II) Se $\langle v, w \rangle \neq 0$ então T não é simétrico.
- (III) Se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I), (II) e (III).
- c. (II) e (III), apenas.
- d. (III), apenas.
- e. (I) e (III), apenas.

Questão 15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se λ e μ são números reais distintos e u, v, w são vetores de V tais que $V(\lambda) = [u, v]$ e $V(\mu) = [w]$, então $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.
- (II) Quaisquer dois autovetores de T distintos são ortogonais.
- (III) Se $\langle T(u), u \rangle > 0$, para todo vetor não nulo $u \in V$, então os autovalores de T são todos positivos.

Está correto apenas o que se afirma em

- a. (III).
- b. (I) e (III).
- c. (I).
- d. (II) e (III).
- e. (I) e (II).

Solução. (I) é verdadeira, pois como $u \in V(2)$ e $v + w \in V(3)$ (que é subespaço vetorial), se u e $v + w$ não são ortogonais então $V(2)$ e $V(3)$ não são ortogonais e T não é simétrico.

(II) é falsa: T pode ser simétrico, logo $V(2)$ é ortogonal a $V(3)$, porém v e w não ortogonais, se $\{v, w\}$ for escolhida uma base **não** ortogonal de $V(3)$.

(III) é verdadeira, pois então $V(2)$ e $V(3)$ são ortogonais. Logo $\mathbb{R}^3$ é a soma direta ortogonal dos espaços próprios de T e isso é equivalente a dizer que T é simétrico. Obs: isso também pode ser visto escolhendo uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com um vetor em $V(2)$ e dois em $V(3)$ e observando que a matriz de T é diagonal (portanto simétrica nessa base).

Resposta certa: alternativa **e.**

Solução. (I) Verdadeira, pois como T é simétrico seus autoespaços distintos são ortogonais.

(II) Falsa, pois dois autovetores distintos associados a um mesmo autovalor podem ser linearmente dependentes.

(III) Verdadeira, pois se λ é autovalor de T e $v \in V(\lambda)$ é unitário, temos

$$0 < \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda.$$

Resposta: alternativa **b.**

Questão 16. Sabe-se que

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz $x(0) = 2, y(0) = 1$. Então, $x(t) - y(t)$ é igual a

- a. e^t
- b. e^{-2t}
- c. e^{-t}
- d. e^{2t}
- e. 0

Solução. Pelos dados a matriz é diagonalizável, com $V(1) = [(1, 1)]$ e $V(2) = [(3, 2)]$. Portanto a forma geral de uma solução do sistema é

$$X(t) = C_1 e^t (1, 1) + C_2 e^{2t} (3, 2).$$

Se $t = 0$ temos $(2, 1) = X(0) = C_1 (1, 1) + C_2 (3, 2)$. Logo $C_1 + 3C_2 = 2$ e $C_1 + 2C_2 = 1$. Resolvendo temos $C_2 = 1$ e $C_1 = -1$ e portanto

$$X(t) = -e^t (1, 1) + e^{2t} (3, 2),$$

ou seja

$$(x(t), y(t)) = (-e^t + 3e^{2t}, -e^t + 2e^{2t}),$$

e então $x(t) - y(t) = e^{2t}$.

Resposta certa: alternativa **d.**