

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \dots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I .

Se λ é um escalar e T , um operador linear em um espaço vetorial, denota-se $V(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I)$. Quando λ é um autovalor de T , $V(\lambda)$ chama-se autoespaço de T associado a λ .

Questão 1. Seja n um inteiro positivo e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz não nula diagonalizável sobre \mathbb{R} . A respeito do sistema linear de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é **FALSO** afirmar que

- a. a soma de duas soluções do sistema ainda é solução do sistema.
- b. existem n funções $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que toda solução do sistema é uma combinação linear de f_1, \dots, f_n .
- c. dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $X(t)$ tal que $X(0) = X_0$.
- d. existem soluções não nulas do tipo $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, onde $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são funções polinomiais.
- e. se o sistema admite soluções complexas, ele também admite soluções reais.

Questão 2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a cônica Γ de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

com respeito a um sistema de coordenadas de E^2 com origem O e base \mathcal{B} ortonormal. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

é correto afirmar que uma equação reduzida de Γ é

- a. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}'}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}} \right\}$.
- b. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}'}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}} \right\}$.
- c. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}'}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}} \right\}$.
- d. impossível de ser determinada a partir dos dados da questão.
- e. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}'}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{\mathcal{B}} \right\}$.

Questão 3. Acerca de uma matriz $A \in M_5(\mathbb{R})$ que tem polinômio característico igual a $-t(t^2 + 1)(t - a)(t - b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar corretamente que

- a. se $a \neq b$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{R} .
- b. se $a = b = 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 2, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não sobre \mathbb{R} .
- c. se $a = b$ e $a \neq 0$, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} e sobre \mathbb{R} .
- d. se $0, a, b$ são dois a dois distintos, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não é diagonalizável sobre \mathbb{R} .
- e. se $a = 0, b \neq 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 1, então A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não sobre \mathbb{R} .

Questão 4. Sabe-se que

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz $x(0) = 2, y(0) = 1$. Então, $x(t) - y(t)$ é igual a

- a. 0
- b. e^{2t}
- c. e^{-t}
- d. e^{-2t}
- e. e^t

Questão 5. Sabendo que $(1, -1 - i)$ é um autovetor da matriz $A =$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $3 + i$, pode-se afirmar corretamente

que as soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ são da forma

- a. $ae^{3t}(\cos t, -\cos t + \sin t) + be^{3t}(\sin t, -\sin t - \cos t)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
- b. $ae^{3t}(-\cos t + \sin t, -\cos t) + be^{3t}(-\cos t + \sin t, \cos t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- c. $ae^{3t}(\cos t - \sin t) + be^{3t}(\cos t + \sin t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- d. $ae^{3t}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$, com $a \in \mathbb{R}$.
- e. $ae^{3t}(\cos t, \cos t) + be^{3t}(\sin t, -\sin t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Questão 6. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se λ e μ são números reais distintos e u, v, w são vetores de V tais que $V(\lambda) = [u, v]$ e $V(\mu) = [w]$, então $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.
- (II) Quaisquer dois autovetores de T distintos são ortogonais.
- (III) Se $\langle T(u), u \rangle > 0$, para todo vetor não nulo $u \in V$, então os autovalores de T são todos positivos.

Está correto apenas o que se afirma em

- a. (I) e (III).
- b. (II) e (III).
- c. (I).
- d. (III).
- e. (I) e (II).

Questão 7. Seja n um inteiro positivo. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, de um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ e de um vetor $v \in \mathbb{C}^n$.

- (I) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ , então \bar{v} é um autovetor de A associado ao autovalor $\bar{\lambda}$.
- (II) Se λ é um autovalor de A , então $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A .
- (III) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, A é diagonalizável sobre \mathbb{C} e todos seus autovalores são reais, então A é diagonalizável sobre \mathbb{R} .

Pode-se afirmar corretamente que

- a. (I), (II) e (III) são verdadeiras.
- b. apenas (II) e (III) são verdadeiras.
- c. (I), (II) e (III) são falsas.
- d. apenas (I) e (II) são verdadeiras.
- e. apenas (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8. Considere a superfície quádrlica de equação

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^3 de base ortonormal. Então, existe um sistema coordenadas em E^3 de base ortonormal, com respeito ao qual a quádrlica tem equação da forma

- a. $z' = a(x')^2$, com $a \in \mathbb{R}$.
- b. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b > 0$.
- c. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c < 0, d \in \mathbb{R}$.
- d. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- e. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b < 0$.

Questão 9. Seja n um inteiro positivo. Assinale a alternativa **FALSA** sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica.

- a. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ são tais que $Av_1 = v_1$ e $Av_2 = 2v_2$, então v_1 e v_2 são ortogonais.
- b. Todos os autovalores de A são reais.
- c. Existe uma matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz real diagonal.
- d. A soma das dimensões dos autoespaços de A é igual a n .
- e. A matriz A tem n autovalores distintos, e existe um conjunto ortonormal formado por n autovetores de A .

Questão 10. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de \mathbb{R}^3 seja simétrica. Suponha que $\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 0, 1)]$ e que $\text{Ker}(T) = [(1, 0, -1)]$. É correto afirmar que

- a. $T(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$.
- b. $T(2, 0, 0) = (2, 1, 0)$.
- c. $T(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
- d. existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(1, 1, 0) = \lambda(1, 1, 0)$.
- e. existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(0, 1, 0) = \lambda(0, 1, 0)$.

Questão 11. Se A é uma matriz de $M_2(\mathbb{R})$ que satisfaz

$$A \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

então é correto afirmar que A é igual a

- a. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$
- c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
- d. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Questão 12. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual, e seja \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^3 . Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear de matriz A na base \mathcal{B} . É correto afirmar que

- a. T é simétrico.
- b. T não é diagonalizável.
- c. T é diagonalizável, mas pode não existir uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por autovetores de T .
- d. existe uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por autovetores de T .
- e. T tem um único autovalor.

Questão 13. Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tem polinômio

característico igual a $(1 - t)(t^2 - 4t + 13)$, pode-se afirmar corretamente que

- a. $\dim V(2 + 3i) = 2$.
- b. os autovalores de A são todos reais, e A é diagonalizável.
- c. A é diagonalizável sobre \mathbb{C} , mas não sobre \mathbb{R} .
- d. $\dim V(1) = 2$.
- e. os autovalores de A são todos reais, mas A não é diagonalizável.

Questão 14. Considere as seguintes afirmações sobre um operador linear T de \mathbb{R}^4 que tenha o polinômio $(t^2 + 4)(t - 2)(t + 2)$ como polinômio característico:

- (I) T é diagonalizável sobre \mathbb{R} .
- (II) T^4 é diagonalizável sobre \mathbb{R} .
- (III) 4 é o único autovalor de T^2 .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I), (II) e (III).
- c. (I) e (III), apenas.
- d. (II) e (III), apenas.
- e. (II), apenas.

Questão 15. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual e seja T um operador linear de \mathbb{R}^3 . Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vetores não nulos tais que $\{v, w\}$ seja linearmente independente. Suponha que $V(2) = [u]$ e $V(3) = [v, w]$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se $\langle u, v + w \rangle \neq 0$, então T não é simétrico.
- (II) Se $\langle v, w \rangle \neq 0$ então T não é simétrico.
- (III) Se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (I), (II) e (III).
- d. (III), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 16. Seja $\Sigma = (O, v_1, v_2)$ um sistema de coordenadas de E^2 em que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V^2 . Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$$

com respeito ao sistema Σ . Então, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V^2 tal que Γ tem uma equação reduzida com respeito ao sistema de coordenadas (O, e_1, e_2) , em que

- a. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma parábola.
- b. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma elipse.
- c. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_B$ e Γ é uma hipérbole.
- d. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_B$ e Γ é uma elipse.
- e. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_B$ e Γ é uma hipérbole.

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	<input type="checkbox"/>				
2	<input type="checkbox"/>				
3	<input type="checkbox"/>				
4	<input type="checkbox"/>				
5	<input type="checkbox"/>				
6	<input type="checkbox"/>				
7	<input type="checkbox"/>				
8	<input type="checkbox"/>				
9	<input type="checkbox"/>				
10	<input type="checkbox"/>				
11	<input type="checkbox"/>				
12	<input type="checkbox"/>				
13	<input type="checkbox"/>				
14	<input type="checkbox"/>				
15	<input type="checkbox"/>				
16	<input type="checkbox"/>				