

MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova de Recuperação - 05/02/2014

Nome: _____ NUSP: _____

Professor: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: _____

Exemplo de preenchimento da folha óptica:

Identificação

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

Questões 1 a 10

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E

Questões 11 a 20

11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

Questões 21 a 30

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E

Campo Reservado

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Código 1107-1 Mês: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Ano: 06 07

↑ número USP 0123456

↑ respostas

↑ não preencher

↑ turma 15

↑ tipo de prova 68 (já preenchido)

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denotará o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \dots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

A transposta de uma matriz A será denotada por A^t .

A base canônica de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n será denotada por can .

Questão 1. Seja \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^3 e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $L, T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são operadores lineares tais que

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

então é correto afirmar que

- a. se T é diagonalizável, então a composta $L \circ T$ também é diagonalizável.
- b. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, L e T são diagonalizáveis.
- c. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a composta $L \circ T$ é diagonalizável.
- d. se L é diagonalizável, então a composta $L \circ T$ também é diagonalizável.
- e. se L é diagonalizável, então T é diagonalizável.

Questão 2. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$, então **NÃO** é uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ a função

- a. $X(t) = (1, 0, 1)e^{2t} + (1, 0, 2)e^t \sin(3t) + (0, 1, 2)e^t \cos(3t)$
- b. $X(t) = (1, 0, 1)e^t - 2(1, 2, 1)e^{2t} \cos(3t) + (1, 2, 1)e^{2t} \sin(3t)$
- c. $X(t) = (1, 0, 1)e^{3t} + (1, 2, 0)e^t \cos(t) - 2(1, 1, 2)e^t \sin(t)$
- d. $X(t) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1)e^t \cos(t) + (1, 1, 1)e^t \sin(t)$
- e. $X(t) = (1, 0, 1)e^t - 3(1, 2, 1)e^t \cos(t) + (1, 1, 2)e^t \sin(t)$

Questão 3. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, i), (1, -i)\}$ do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 . A respeito do operador linear $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

é correto afirmar que

- a. T tem um autovalor complexo não real.
- b. $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são autovetores de T .
- c. existe uma base \mathcal{C} de \mathbb{C}^2 constituída de vetores reais de modo que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja diagonal.
- d. se $A = [T]_{\mathcal{D}}$, em que $\mathcal{D} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, então $A + A^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.
- e. o subconjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ é invariante por T .

Questão 4. Considere as bases $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x^2\}$ e $\mathcal{D} = \{(0, 1), (1, 1)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que satisfaz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assinale a afirmação

FALSA.

- a. A dimensão do núcleo de T é 1.
- b. $\{T(1 - x), T(1 + x)\}$ é uma base da imagem de T .
- c. T é sobrejetora.
- d. $T(3 + x^2) = (4, 2)$.
- e. Existe uma base \mathcal{F} de $P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{F}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Questão 5. Considere as afirmações abaixo acerca de um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita maior ou igual a 2, munido de um produto interno.

- (I) Se T é simétrico e possui um único autovalor, então a matriz de T em relação a qualquer base de V é simétrica.
- (II) Se T é simétrico, então existem infinitas bases ortonormais de V em relação às quais a matriz de T é simétrica.
- (III) Se V possui uma base ortonormal constituída de autovetores de T , então T é simétrico.

É correto o que se afirma em

- a. (I) e (III), apenas.
- b. (II) e (III), apenas.
- c. (I), (II) e (III).
- d. (I) e (II), apenas.
- e. (II), apenas.

Questão 6. Considere \mathbb{R}^n com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual, e seja $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a projeção ortogonal sobre $[v]$, então **NÃO** é correto afirmar que

- a. $\dim \text{Ker}(T) = n - 1$.
- b. $T(w) = \langle w, v \rangle v$, para todo $w \in \mathbb{R}^n$.
- c. o coeficiente na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{R}^n é igual a $a_i a_j$.
- d. $\text{Ker}(T) = [v]^\perp$.
- e. se $w \notin [v]$, então $T(w) = 0$.

Questão 7. Seja $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $A = [T]_{\text{can}} \in M_n(\mathbb{R})$. Seja $u + iv$ um autovetor de T , com $u, v \in \mathbb{R}^n$, ambos não nulos, e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ o autovalor associado a $u + iv$. Considere as afirmações abaixo:

- (I) Se λ é real, então u e v são autovetores de A .
- (II) Se λ não é real, então u e v são linearmente independentes.
- (III) Se λ é real, então u e v são linearmente dependentes.

É correto o que se afirma em

- a. (I), (II) e (III).
- b. (I), apenas.
- c. (I) e (II), apenas.
- d. (III), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 8. A respeito dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 ,

$$A = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\},$$

é correto afirmar que

- a. $[A] \cup [B] = [A] + [B]$.
- b. $[A] \cup [B]$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .
- c. para todo $u \in \mathbb{R}^3$, existem infinitos $v \in [A]$ e infinitos $w \in [B]$ tais que $u = v + w$.
- d. $[B] \subset [A]$.
- e. $\dim([A] + [B]) = 2$.

Questão 9. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (\alpha - t)(1 - t)(2 - t)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a afirmação **FALSA**, sabendo que $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são autovetores de T , associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente.

- a. Se matriz de T na base canônica de \mathbb{R}^3 é simétrica, então $(0, 0, 1)$ é autovetor de T .
- b. Se $\alpha \neq 0$, então T é sobrejetor.
- c. Se $\alpha = 0$, então a matriz de T na base canônica de \mathbb{R}^3 é simétrica.
- d. Se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, então T é injetor.
- e. O operador linear $T^2 - T$ não é injetor.

Questão 10. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

Sabendo que $(1, 1)$ e $(1, 2/3)$ são autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se $(x(t), y(t))$ é a solução do sistema que satisfaz $(x(0), y(0)) = (2, 5/3)$, pode-se concluir que $x(1) - 3y(1)$ é igual a

- a. $-2e^2 + 3e^3$
- b. $-2e^3 - 3e^4$
- c. $-2e^3 - e^4$
- d. $3e^4 - 2e^3$
- e. $e^3 - 2e^4$

Questão 11. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que existe uma base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

pode-se afirmar corretamente que a soma dos elementos na primeira coluna de $[T^5]_{\text{can}}$ é igual a

- a. 2^6
- b. $5^5/3$
- c. 5^5
- d. $2^6/3 + 2^5$
- e. $2^6 + 5^5$

Questão 12. Sejam $a, b, c, d, F \in \mathbb{R}$ e considere a cônica Γ de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Fx + Fy + d = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^2 de base ortonormal.

Sabendo que 1 e 2 são autovalores da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ e que $(1, 1), (1, -1)$ são autovetores dessa matriz associados a 1 e 2, respectivamente, pode-se afirmar corretamente que

- a. se $F^2 = 2d$, então Γ contém um único ponto.
- b. se $F^2 > 2d$, então Γ não é limitada.
- c. se $F^2 > d$, então Γ é uma circunferência.
- d. se $F^2 < d$, então Γ é uma hipérbole.
- e. se $F^2 = d$, então Γ é um par de retas concorrentes.

Questão 13. Considere $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Se $f(x) = \alpha + \beta x^2$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é o polinômio par de grau menor ou igual a dois que melhor aproxima o polinômio ímpar $g(x) = x + x^3$, então $\alpha + \beta$ é igual a

- a. -2
- b. 0
- c. 2
- d. -1
- e. 1

Questão 14. Seja n um inteiro maior do que 1. A respeito de matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $AB = 0$, é correto afirmar que

- a. a matriz A não é inversível.
- b. todo vetor não nulo que é combinação linear das colunas de B é autovetor de A .
- c. a matriz B não é inversível.
- d. todo autovalor de B é também autovalor de A .
- e. se $A \neq 0$, então $B = 0$.

Questão 15. Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear que satisfaz $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$. Então, pode-se afirmar corretamente que

- a. $\dim V$ pode ser igual a 3.
- b. $\text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = V$.
- c. $T = 0$.
- d. $T^2 = T$.
- e. $T^2 = 0$ e $T \neq 0$.

Questão 16. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz cujo polinômio característico possui uma raiz complexa não real. Sejam $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ os operadores lineares cujas matrizes nas bases canônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{C}^3 , respectivamente, são iguais a A . Assinale a afirmação **FALSA**.

- a. T é diagonalizável.
- b. $T_{\mathbb{C}}$ é diagonalizável, mas T não é diagonalizável.
- c. $T_{\mathbb{C}}$ possui um autovalor real.
- d. Existe uma base de \mathbb{C}^3 formada por autovetores de $T_{\mathbb{C}}$.
- e. Os autovalores de $T_{\mathbb{C}}$ são todos distintos.

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	<input type="checkbox"/>				
2	<input type="checkbox"/>				
3	<input type="checkbox"/>				
4	<input type="checkbox"/>				
5	<input type="checkbox"/>				
6	<input type="checkbox"/>				
7	<input type="checkbox"/>				
8	<input type="checkbox"/>				
9	<input type="checkbox"/>				
10	<input type="checkbox"/>				
11	<input type="checkbox"/>				
12	<input type="checkbox"/>				
13	<input type="checkbox"/>				
14	<input type="checkbox"/>				
15	<input type="checkbox"/>				
16	<input type="checkbox"/>				