# Álgebra Linear II - Poli - Gabarito Prova SUB-tipo 00

**Questão 1.** Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$, é $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considerando $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual, analise as seguintes afirmações:

(I) $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(II) $\mathcal{B}$ não é necessariamente uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, mas existe uma base ortonormal $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz simétrica.

(III) $\mathcal{B}$ é formada por autovetores de $T$.

Está correto o que se afirma em

**a.** (I), (II) e (III).

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (III), apenas.

**d.** (II) e (III), apenas.

**e.** (I) e (II), apenas.

**Solução**
(I) é falsa. Se $\mathcal{B}$ fosse ortonormal, como $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, $T$ seria um operador simétrico. Mas então a matriz de $T$ na base canônica seria simétrica, o que é falso.
(II) é falsa, pelo mesmo argumento.
(III) É verdadeira, pois $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.

Resposta correta: ítem c.

**Questão 2.** Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, em que $a$ e $b$ são números reais, é correto afirmar que

**a.** se $b \neq 2$, então $A$ é diagonalizável.

**b.** se $b = 1$ e $A$ é diagonalizável, então $a = 0$.

**c.** se $b = 1$, então $A$ não é diagonalizável.

**d.** se $A$ é diagonalizável, então $b \neq 1$ e $b \neq 0$.

**e.** se $A$ é diagonalizável, então $a = b = 0$.

**Solução**
Temos $p(\lambda) = (b-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$. Portanto os autovalores são $1, 2$ e $b$. Se $b \notin \{1, 2\}$ os autovalores são todos distintos e $A$ é diagonalizável.

Se $b = 1$, $A$ é diagonalizável $\iff$ dim $V(1) = 2$. Agora $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $a \neq 0$ a matriz $A - I$ tem duas linhas L.I. $\Longrightarrow$ dim $V(1) = 1$.
Se $a = 0$ a matriz $A - I$ tem apenas uma linha não nula. $\Longrightarrow$ dim $V(1) = 2$.
Portanto, se $b = 1$, $A$ é diagonalizável $\iff a = 0$.

Se $b = 2$, $A$ é diagonalizável $\iff$ dim $V(2) = 2$. Agora $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ -a & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Nesse caso, a matriz $A - I$ tem apenas uma linha L.I. $\Longrightarrow$ dim $V(2) = 2$.
Portanto, se $b = 2$, $A$ é diagonalizável.
Temos então que a) é falsa ($A$ não é diagonalizável se $a \neq 0$ e $b = 1$), b) é verdadeira, c) é falsa ($A$ pode ser diagonaliável se $a = 0$), d) é falsa ($A$ é diagonalizável se $b = 0$), e) é falsa ($A$ é diagonalizável, por exemplo, se $a = b = 3$).

Resposta correta: ítem b.

**Questão 3.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e sejam $U$ e $W$ subespaços vetoriais de $V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base de $U$ e $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de $W$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de $U + W$.

(II) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base ortogonal de $U$, $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de $W$ e $V = U \oplus W$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de $V$.

(III) Se $\{u_1, \dots, u_r\} \subset U$ é um conjunto linearmente independente, $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W$ é um conjunto linearmente independente e $W \subset U^\perp$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é um conjunto lineamente independente.

Está correto o que se afirma em

**a.** (II), apenas.

**b.** (I), (II) e (III).

**c.** (II) e (III), apenas.

**d.** (I) e (II), apenas.

**e.** (III), apenas.

**Solução**
(I) é falso. Contra-exemplo: $V = \mathbb{R}^2$, $U = [(1,0)]$, $W = [(2,0)$, $\{(1,0), (2,0)\}$ é L.D.
(II) é falso. Contra-exemplo: $V = \mathbb{R}^2$, $U = [(1,0)]$, $W = [(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})]$, $\{(1,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ não é ortogonal.
(III) é verdadeiro. Neste caso $U \cap W = \{0\}$. Se $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = 0$, então $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = -\beta_1 v_1 - \cdots - \beta_k v_k \Longrightarrow \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r \in U \cap W \Longrightarrow \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Analogamente $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$.

Resposta correta: ítem e.

**Questão 4.** Seja $\lambda$ um número real não nulo e diferente de 1 e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, pode-se afirmar corretamente que

**a.** $\lambda$ é o único autovalor de $T$.

**b.** 1 e $\lambda$ são autovalores de $T$.

**c.** $T$ é diagonalizável.

**d.** $\operatorname{Ker}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

**e.** existe uma matriz invertível $B$ tal que $B^{-1}AB = A^{\mathrm{t}}$.

**Solução**
a) é falso, o único autovalor é 1.
b) é falso pelo mesmo argumento.
c) é falso, dim Ker $\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ e $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.
d) é falso, 0 não é autovalor.
e) é verdadeiro. Basta tomar $B = [Id]_{\beta,Can}$, $\beta = \{v_1 = e_3, v_2 = e_2, v_3 = e_1\}$.

Resposta correta: ítem e.

**Questão 5.** Seja $T\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^4$ tenha entradas reais. Se $1+i$ e $i$ são autovalores de $T$ e $(1+i,1,1,1)$ é um autovetor associado a $1+i$ e $(1,-i,1,-i)$ é um autovetor associado a $i$, então $T(2+i,1+i,2,1+i)$ é igual a

**a.** $(2+i,1+i,2,1+i)$.

**b.** $(2i,i,2i+1,i)$.

**c.** $(i,2+i,1,2+i)$.

**d.** $(-i,1,-i,1)$.

**e.** $(2i,i+1,i+1,i+1)$.

**Solução**
Temos $(2+i,1+i,2,1+i) = (1+i,1,1,1) + (1,i,1,i)$. que são autofunções associadas aos autovalores $1+i$ e $\bar{i} = -i$, respectivamente. Portanto

$$T(2+i,1+i,2,1+i) = T(1+i,1,1,1) + T(1,i,1,i) = (1+i)(1+i,1,1,1) - i(1,i,1,i) = (i,2+i,1,2+i).$$

Resposta correta: c.

**Questão 6.** A respeito das funções

$$S\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad S(p) = p - p' - p(0),$$
$$T\colon P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = \begin{bmatrix} p'(0) & p'(1)+1 \\ p'(2) & p'(3) \end{bmatrix},$$
$$P\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad P(p) = p(1)p',$$

em que $p'$ denota a derivada de $p$, é correto afirmar que

**a.** apenas $P$ é uma transformação linear.

**b.** $S$, $T$ e $P$ são transformações lineares.

**c.** apenas $S$ e $T$ são transformações lineares.

**d.** apenas $S$ e $P$ são transformações lineares.

**e.** apenas $S$ é uma transformação linear.

**Solução**
i) $S$ é soma de transformações lineares; portanto é linear.
$T$ nã é linear pois $T(0) \neq 0$.
$P$ não é linear pois $P(2p) = 2p(1) \cdot 2p' = 4P(p)$.

Resposta correta: e.

**Questão 7.** Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Dentre as alternativas abaixo, assinale aquela que contém uma afirmação **FALSA** a respeito desse contexto.

**a.** Se $\dim U = \dim V$, então $U$ e $V$ são isomorfos.

**b.** Se $T$ é sobrejetora, então $\dim U \geq \dim V$.

**c.** Se $U = V$, então $T$ é bijetora.

**d.** Se $T$ é bijetora, então $T^{-1}\colon V \to U$ é uma transformação linear.

**e.** Se $T$ é bijetora, então $\dim U = \dim V$.

**Solução**
a) é verdadeira.
b) é verdadeira. Se $T$ é sobre, então $dimU = dim\,\mathrm{Ker}\,T + dim\,\mathrm{Im}\,T = dim\,\mathrm{Ker}\,T + dimV \Longrightarrow dimU \geq dimV$.
c) é falsa. Contra-exemplo: $T : R^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = x$.
d) é verdadeira.
e) é verdadeira. $dimU = dim\,\mathrm{Ker}\,T + dim\,\mathrm{Im}\,T = dim\,\mathrm{Ker}\,T + dimV = dimV$.

Resposta correta: c.

**Questão 8.** Seja $\Gamma$ a cônica de equação

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 24 = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas de $E^2$, com base ortonormal. Então existe um sistema de coordenadas de $E^2$, com base ortonormal, com respeito ao qual $\Gamma$ tem equação reduzida da forma

$$4u^2 + 9v^2 = k,$$

em que $k$ é igual a

**a.** 0.

**b.** 2.

**c.** 1.

**d.** $-1$.

**e.** $-2$.

**Solução**

Do enunciado, segue que os autovalores da matriz da forma quadrática $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. são 4 e 9. Os respectivos autovetores normalizados são $v_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.
Portanto, as coordenadas $u$ e $v$ no sistema de coordenadas dado pelos vetores $v_1$ e $v_2$, com centro na origem serão dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{-2}{\sqrt{5}}v \end{aligned}$$

A equação da cônica neste sistema de coordenadas, será:

$$\begin{aligned} 4u^2 + 9v^2 + 8\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v) + 4\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{-2}{\sqrt{5}}v) + 24 &= 0 \Longleftrightarrow \\ 4(u + \frac{5}{2})^2 - 25 + 9v^2 + 24 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo $u' = u + \frac{5}{2}$, $v' = v$, obtemos

$$4u'^2 + 9v'^2 = 1.$$

Resposta correta: c.

**Questão 9.** Seja $V$ espaço um vetorial de dimensão $n$ com produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear simétrico com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\lambda_1 = \lambda_n$, então $T = \lambda_1 I$.

(II) Se $v$ e $w$ são autovetores de $T$ e $v \neq w$, então $\langle v, w \rangle = 0$.

(III) Para todo vetor unitário $v \in V$, tem-se $\langle T(v), v \rangle \geq \lambda_1$.

Está correto o que se afirma em

**a.** (I) e (II), apenas.

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (I), (II) e (III).

**d.** (I), apenas.

**e.** (II) e (III), apenas.

**Solução**
(I) é verdadeira, pois $T$ é diagonalizável com um único autovalor $\lambda_i$,
(II) é falsa, no caso em que algum autovalor $\lambda_i$ tem multiplicidade maior do que 1. Nesse caso, dois autovetores podem ser escolhidos arbitrariamente em um espaço de dimensão maior do que 1.
(III) é verdadeira. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormal, com $\lambda_i$ autovalor associado a $e_i$. Então

$$\langle T(v), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle \langle Tv, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v, e_i\rangle^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle^2 = \lambda_1 \|v\| = \lambda_1.$$

Resposta correta:b.

**Questão 10.** A respeito de um espaço vetorial $V$ de dimensão $n$, munido de um produto interno, é correto afirmar que

**a.** se $T\colon V \to V$ é um operador linear simétrico, então $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, qualquer que seja $\mathcal{B}$ base de $V$.

**b.** 0 pode ser um autovalor do operador linear identidade $I$ de $V$.

**c.** se $T\colon V \to V$ é um operador linear simétrico, então toda matriz de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ é a matriz de $T$ em relação a alguma base ortonormal de $V$.

**d.** se $A$ é uma matriz invertível em $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, então existem bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $V$ tais que $A = [I]_{\mathcal{BC}}$.

**e.** se $T\colon V \to V$ é um operador linear e existe uma base $\mathcal{B}$de $V$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, então $T$ é simétrico.

**Solução**
a) é falsa (vale se $\mathcal{B}$ é ortonormal).
b) é falsa; 1 é o único autovalor da identidade.
c) é falsa; a matriz de $T$ em uma base ortonormal tem que ser simétrica.
d) é verdadeira. Dada a matriz $a_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$ e uma base $C = \{v_1, \cdots, v_n\}$, basta definir $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. $\mathcal{B} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ é um conjunto L.I. pois, caso contrário, as colunas de $A$ seriam L.D. e, portanto, base de $V$.
e) é falsa (vale se $\mathcal{B}$ é ortonormal).

Resposta correta: d.

**Questão 11.** Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se $S = [1, t^2]$, então o polinômio de $S$ mais proximo de $2 + t + t^2$

**a.** tem duas raízes reais distintas.

**b.** é constante.

**c.** tem duas raízes complexas conjugadas distintas.

**d.** tem uma raiz real de multiplicidade 2.

**e.** tem grau 1.

**Solução**
Denotemos $u_1 = 1$, $u_2 = t^2$. Para encontrar uma base ortogonal de $S$. Para isto, fazemos $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2} = t^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = t^2 - \frac{2}{3}$.
O polinômio de $S$ mais proximo de $p(t) = 2 + t + t^2$ é dado por:

$$q = \frac{\langle p, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle p, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{8}{3} \cdot 1 + \frac{2/3}{(2/3)} \cdot (t^2 - \frac{2}{3}) = t^2 + 2.$$

As raízes de $q$ são $\pm\sqrt{2}i$.

Resposta correta:c.

**Questão 12.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $S$ um subespaço de $V$. Assinale a afirmação **FALSA** acerca do operador linear $T\colon V \to V$, definido por $T(v) = \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

**a.** Se $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base de $S$, então $T(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_r \rangle}{\|u_r\|^2} u_r$, para todo $v \in V$.

**b.** Qualquer $v \in V$ pode ser escrito como $v = u + w$, com $u \in S$ e $w \in S^\perp$.

**c.** $\operatorname{Ker} T = S^\perp$.

**d.** Qualquer $u \in S$, $u \neq 0_V$, é um autovetor de $T$ associado ao autovalor 1.

**e.** $\operatorname{Im}(T) = S$.

**Solução**
a) Falso. A fórmula vale apenas se $\{u_1, \cdots, u_r\}$ é base ortogonal.
b) Verdadeiro. Se $v \in V$, temos $v = \operatorname{proj}_S v + (v - \operatorname{proj}_S v)$ e $\operatorname{proj}_S v \in S$, $(v - \operatorname{proj}_S v) \in S^\perp$.
c) Verdadeiro.Se $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base ortogonal de $S$, então $\operatorname{proj}_S v = 0 \iff \langle v, u_i \rangle = 0$, para $1 \leq i \leq r \iff v \in S^\perp$.
d) Verdadeiro. $\operatorname{proj}_S v = v, \forall v \in S$.
e) Verdadeiro, consequência de c) e d).

Resposta correta: a).

**Questão 13.** A matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ possui autovalores $12, 18$ e $6$, associados, respectivamente, aos autovetores $(1,0,1), (1,2,-1)$ e $(1,1,1)$. Se $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (3,2,3)$, então $x(1) - y(1) + 2z(1)$ é igual a

**a.** $2e^6 + e^{18} - e^{12}$.

**b.** $2e^{18} - e^{12}$.

**c.** $3e^{12} + 4e^6$.

**d.** $2e^6 - e^{12}$.

**e.** $3e^6 + 2e^{18} - e^{12}$.

**Solução**
A solução geral é:

$$X(t) = k_1 e^{12t}(1,0,1) + k_2 e^{18t}(1,2,-1) + k_3 e^{6t}(1,1,1).$$

De $X(0) = (3,2,3)$, obtemos

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 3 \\ 2k_2 + k_3 &= 2 \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 3 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 2$. Segue que

$$X(t) = e^{12t}(1,0,1) + 2e^{6t}(1,1,1) \Longrightarrow X(1) = e^{12}(1,0,1) + 2e^{6}(1,1,1)$$

Portanto $x(1) - y(1) + 2z(1) = e^{12} + 2e^6 - 2e^6 + 2e^{12} + 4e^6 = 3e^{12} + 4e^6$.

Resposta correta: c.

**Questão 14.** Seja $n$ um inteiro positivo. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de uma matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

**a.** Se $A$ é diagonalizável e $A^2 = 0$, então $A = 0$.

**b.** Se todos os autovalores de $A$ são nulos, então $A = 0$.

**c.** Se $A$ é semelhante a $2A$, então todo autovalor de $A$ é nulo.

**d.** Se $A$ tem pelo menos um autovalor real, então existe um subespaço de dimensão 1 de $\mathbb{R}^n$ que é invariante por $A$.

**e.** Se $A$ é semelhante a uma matriz diagonalizável, então $A$ é diagonalizável.

**Solução**
a) Verdadeiro. Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ então $A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$. Se $A^2 = 0$ então $\lambda_i^2 = 0, 1 \leq i \leq n \Longrightarrow b\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq n \Longrightarrow A = 0$.
b) Falso. Contra-exemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
c) Verdadeiro. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, os autovalores (complexos) de $A$ com $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \cdots \leq |\lambda_n|$. Então $2\lambda_1, \cdots, 2\lambda_n$ são os autovalores de $2A$ em ordem crescente de seus módulos . Se $A$ é semelhante a $2A$ então $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \{2\lambda_1, \cdots, 2\lambda_n\}$. Portanto $|\lambda_1| = 2|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n| = 2|\lambda_n|$ e segue que $\lambda_1 = 0, \cdots \lambda_n = 0$.
d) Verdadeiro. Basta tomar $S = [v]$, sendo $v$ um autovetor.
e) Verdadeiro. Se $A = M^{-1}BM$ e $B = P^{-1}DP$, sendo $D$ diagonal, então $A = (PM)^{-1}DPM$. Portanto $A$ é diagonalizável.

Resposta correta: b)

**Questão 15.** No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = [(1,2,3,1), (1,0,1,1)(0,1,1,0)] \quad \text{e} \quad S_2 = [(1,0,0,-1)].$$

As dimensões de $S_1$, $S_2^{\perp}$ e $S_1 \cap S_2^{\perp}$ são, respectivamente, iguais a

**a.** 2, 1 e 1.

**b.** 3, 3 e 2.

**c.** 2, 3 e 2.

**d.** 3, 2 e 2.

**e.** 2, 3 e 1.

**Solução**
Como $(1,2,3,1) = (1,0,1,1) + 2(0,1,1,0)$ e $\{(1,0,1,1),(0,1,1,0)\}$ é L.I. segue que $\dim S_1 = 2$. Agora $\dim S_2^{\perp} = 4 - \dim S_2 = 3$.
Finalmente, $S_1 \subset S_2^{\perp}$ e, portanto, $\dim S_1 \cap S_2^{\perp} = \dim S_1 = 2$.

Resposta correta: c)

**Questão 16.** Seja $n$ um inteiro positivo, sejam $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Se $\lambda$ é um autovalor de $AB$, com autovetor associado $v$, e $Bv \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, então $\lambda$

**a.** não é um autovalor de $BA$.

**b.** é um autovalor de $B$.

**c.** é um autovalor de $BA$ com autovetor associado $Bv$.

**d.** é um autovalor de $A$ com autovetor associado $Bv$.

**e.** é um autovalor de $BA$ com autovetor associado $v$.

**Solução**
a) Falso. Contra-exemplo: $A = Id$, $B$ arbitrária.
b) Falso. Contra-exemplo: $B = Id$, $A$ matriz com autovalores diferentes de 1.
c) Verdadeiro. $BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$ e $w = Bv \neq 0$.
d) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0, \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v = (2,1)$ é autovetor com autovalor associado $\lambda = 2$ e $Bv = (2,4)$ não é autovetor de $A$.
e) Falso. Mesmo contra-exemplo de d) $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $(2,1)$ não é autovetor de $BA$.

Resposta correta: c)