

MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova Substitutiva - 04/12/2013

Nome: _____ NUSP: _____

Professor: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: _____

O exemplo mostra a folha óptica dividida em seções: 'Identificação' (com campos para nome, número USP 0123456, respostas, turma 15 e tipo de prova 68), 'Questões 1 a 10', 'Questões 11 a 20', 'Questões 21 a 30' e 'Campo Reservado' (com 5 colunas numeradas de 1ª a 5ª). Cada questão tem 5 opções (A-E) e o exemplo mostra como marcar a resposta correta com um ponto preto.

↑ número USP 0123456 ↑ respostas ↑ não preencher ↑ turma 15 ↑ tipo de prova 68 (já preenchido)

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denotará o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

O vetor nulo de V será denotado por 0_V .

O operador linear identidade em V será denotado por I .

Se o espaço vetorial V está munido de um produto interno e S é um subespaço vetorial de V , a projeção ortogonal de $v \in V$ sobre S , quando existir, será denotada por $\text{proj}_S v$.

A transposta de uma matriz A será denotada por A^t .

Questão 1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz, com respeito à base canônica de \mathbb{R}^2 , é $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Seja \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^2 tal que

$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considerando \mathbb{R}^2 munido do produto interno usual,

analise as seguintes afirmações:

- (I) \mathcal{B} é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 .
- (II) \mathcal{B} não é necessariamente uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 , mas existe uma base ortonormal \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz simétrica.
- (III) \mathcal{B} é formada por autovetores de T .

Está correto o que se afirma em

- a. (I), (II) e (III).
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (III), apenas.
- d. (II) e (III), apenas.
- e. (I) e (II), apenas.

Questão 2. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, em que a e b são números

reais, é correto afirmar que

- a. se $b \neq 2$, então A é diagonalizável.
- b. se $b = 1$ e A é diagonalizável, então $a = 0$.
- c. se $b = 1$, então A não é diagonalizável.
- d. se A é diagonalizável, então $b \neq 1$ e $b \neq 0$.
- e. se A é diagonalizável, então $a = b = 0$.

Questão 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e sejam U e W subespaços vetoriais de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base de U e $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de W , então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de $U + W$.
- (II) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base ortogonal de U , $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de W e $V = U \oplus W$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de V .
- (III) Se $\{u_1, \dots, u_r\} \subset U$ é um conjunto linearmente independente, $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W$ é um conjunto linearmente independente e $W \subset U^\perp$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é um conjunto linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

- a. (II), apenas.
- b. (I), (II) e (III).
- c. (II) e (III), apenas.
- d. (I) e (II), apenas.
- e. (III), apenas.

Questão 4. Seja λ um número real não nulo e diferente de 1 e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de \mathbb{R}^3 é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, pode-se afirmar corretamente que

- a. λ é o único autovalor de T .
- b. 1 e λ são autovalores de T .
- c. T é diagonalizável.
- d. $\text{Ker}(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$.
- e. existe uma matriz invertível B tal que $B^{-1}AB = A^t$.

Questão 5. Seja $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de \mathbb{C}^4 tenha entradas reais. Se $1 + i$ e i são autovalores de T e $(1 + i, 1, 1, 1)$ é um autovetor associado a $1 + i$ e $(1, -i, 1, -i)$ é um autovetor associado a i , então $T(2 + i, 1 + i, 2, 1 + i)$ é igual a

- a. $(2 + i, 1 + i, 2, 1 + i)$.
- b. $(2i, i, 2i + 1, i)$.
- c. $(i, 2 + i, 1, 2 + i)$.
- d. $(-i, 1, -i, 1)$.
- e. $(2i, i + 1, i + 1, i + 1)$.

Questão 6. A respeito das funções

$$S: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R}), \quad S(p) = p - p' - p(0),$$

$$T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = \begin{bmatrix} p'(0) & p'(1) + 1 \\ p'(2) & p'(3) \end{bmatrix},$$

$$P: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R}), \quad P(p) = p(1)p',$$

em que p' denota a derivada de p , é correto afirmar que

- a. apenas P é uma transformação linear.
- b. S , T e P são transformações lineares.
- c. apenas S e T são transformações lineares.
- d. apenas S e P são transformações lineares.
- e. apenas S é uma transformação linear.

Questão 7. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Dentre as alternativas abaixo, assinale aquela que contém uma afirmação **FALSA** a respeito desse contexto.

- a. Se $\dim U = \dim V$, então U e V são isomorfos.
- b. Se T é sobrejetora, então $\dim U \geq \dim V$.
- c. Se $U = V$, então T é bijetora.
- d. Se T é bijetora, então $T^{-1}: V \rightarrow U$ é uma transformação linear.
- e. Se T é bijetora, então $\dim U = \dim V$.

Questão 8. Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 24 = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas de E^2 , com base ortonormal. Então existe um sistema de coordenadas de E^2 , com base ortonormal, com respeito ao qual Γ tem equação reduzida da forma

$$4u^2 + 9v^2 = k,$$

em que k é igual a

- a. 0.
- b. 2.
- c. 1.
- d. -1 .
- e. -2 .

Questão 9. Seja V espaço vetorial de dimensão n com produto interno e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear simétrico com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\lambda_1 = \lambda_n$, então $T = \lambda_1 I$.

(II) Se v e w são autovetores de T e $v \neq w$, então $\langle v, w \rangle = 0$.

(III) Para todo vetor unitário $v \in V$, tem-se $\langle T(v), v \rangle \geq \lambda_1$.

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (I), (II) e (III).
- d. (I), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 10. A respeito de um espaço vetorial V de dimensão n , munido de um produto interno, é correto afirmar que

- a. se $T: V \rightarrow V$ é um operador linear simétrico, então $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, qualquer que seja \mathcal{B} base de V .
- b. 0 pode ser um autovalor do operador linear identidade I de V .
- c. se $T: V \rightarrow V$ é um operador linear simétrico, então toda matriz de $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz de T em relação a alguma base ortonormal de V .
- d. se A é uma matriz invertível em $M_n(\mathbb{R})$, então existem bases \mathcal{B} e \mathcal{C} de V tais que $A = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.
- e. se $T: V \rightarrow V$ é um operador linear e existe uma base \mathcal{B} de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, então T é simétrico.

Questão 11. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se $S = [1, t^2]$, então o polinômio de S mais próximo de $2 + t + t^2$

- a. tem duas raízes reais distintas.
- b. é constante.
- c. tem duas raízes complexas conjugadas distintas.
- d. tem uma raiz real de multiplicidade 2.
- e. tem grau 1.

Questão 12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja S um subespaço de V . Assinale a afirmação **FALSA** acerca do operador linear $T: V \rightarrow V$, definido por $T(v) = \text{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

- a. Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base de S , então $T(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_r \rangle}{\|u_r\|^2} u_r$, para todo $v \in V$.
- b. Qualquer $v \in V$ pode ser escrito como $v = u + w$, com $u \in S$ e $w \in S^\perp$.
- c. $\text{Ker } T = S^\perp$.
- d. Qualquer $u \in S$, $u \neq 0_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor 1.
- e. $\text{Im}(T) = S$.

Questão 13. A matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ possui autovalores 12, 18 e 6, associados, respectivamente, aos autovetores $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ e $(1, 1, 1)$. Se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (3, 2, 3)$, então $x(1) - y(1) + 2z(1)$ é igual a

- a. $2e^6 + e^{18} - e^{12}$.
- b. $2e^{18} - e^{12}$.
- c. $3e^{12} + 4e^6$.
- d. $2e^6 - e^{12}$.
- e. $3e^6 + 2e^{18} - e^{12}$.

Questão 14. Seja n um inteiro positivo. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- a. Se A é diagonalizável e $A^2 = 0$, então $A = 0$.
- b. Se todos os autovalores de A são nulos, então $A = 0$.
- c. Se A é semelhante a $2A$, então todo autovalor de A é nulo.
- d. Se A tem pelo menos um autovalor real, então existe um subespaço de dimensão 1 de \mathbb{R}^n que é invariante por A .
- e. Se A é semelhante a uma matriz diagonalizável, então A é diagonalizável.

Questão 15. No espaço vetorial \mathbb{R}^4 , munido do produto interno usual, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = [(1, 2, 3, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)] \quad \text{e} \quad S_2 = [(1, 0, 0, -1)].$$

As dimensões de S_1 , S_2^\perp e $S_1 \cap S_2^\perp$ são, respectivamente, iguais a

- a. 2, 1 e 1.
- b. 3, 3 e 2.
- c. 2, 3 e 2.
- d. 3, 2 e 2.
- e. 2, 3 e 1.

Questão 16. Seja n um inteiro positivo, sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Se λ é um autovalor de AB , com autovetor associado v , e $Bv \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, então λ

- a. não é um autovalor de BA .
- b. é um autovalor de B .
- c. é um autovalor de BA com autovetor associado Bv .
- d. é um autovalor de A com autovetor associado Bv .
- e. é um autovalor de BA com autovetor associado v .

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	<input type="checkbox"/>				
2	<input type="checkbox"/>				
3	<input type="checkbox"/>				
4	<input type="checkbox"/>				
5	<input type="checkbox"/>				
6	<input type="checkbox"/>				
7	<input type="checkbox"/>				
8	<input type="checkbox"/>				
9	<input type="checkbox"/>				
10	<input type="checkbox"/>				
11	<input type="checkbox"/>				
12	<input type="checkbox"/>				
13	<input type="checkbox"/>				
14	<input type="checkbox"/>				
15	<input type="checkbox"/>				
16	<input type="checkbox"/>				