MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

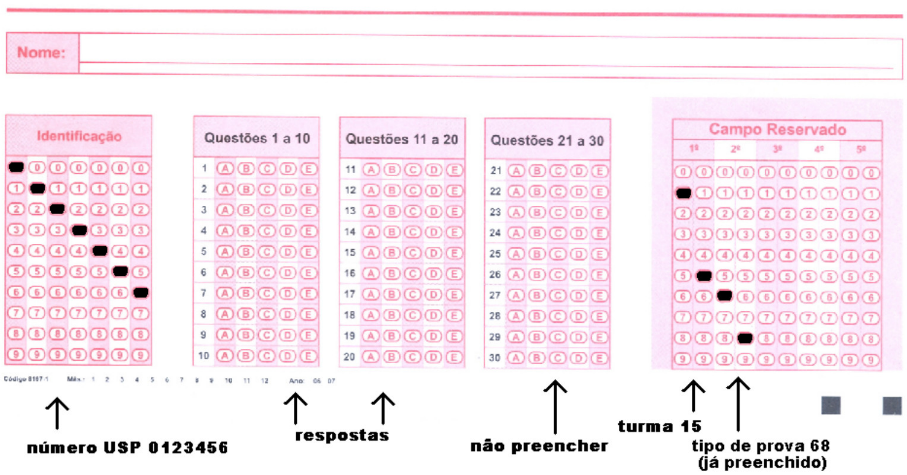
Prova Substitutiva - 04/12/2013

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Professor: ______________________________ **Turma:** ______________

Instruções

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$, então $[v_1, \ldots, v_n]$ denotará o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

O vetor nulo de V será denotado por 0_V.

O operador linear identidade em V será denotado por I.

Se o espaço vetorial V está munido de um produto interno e S é um subespaço vetorial de V, a projeção ortogonal de $v \in V$ sobre S, quando existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S v$.

A transposta de uma matriz A será denotada por A^{t}.

Questão 1. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Dentre as alternativas abaixo, assinale aquela que contém uma afirmação **FALSA** a respeito desse contexto.

a. Se T é bijetora, então $T^{-1}\colon V \to U$ é uma transformação linear.
b. Se $U = V$, então T é bijetora.
c. Se T é sobrejetora, então $\dim U \geq \dim V$.
d. Se T é bijetora, então $\dim U = \dim V$.
e. Se $\dim U = \dim V$, então U e V são isomorfos.

Questão 2. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = [(1,2,3,1), (1,0,1,1)(0,1,1,0)] \quad \text{e} \quad S_2 = [(1,0,0,-1)].$$

As dimensões de S_1, $S_2^{\perp}$ e $S_1 \cap S_2^{\perp}$ são, respectivamente, iguais a

a. 2, 1 e 1.
b. 3, 2 e 2.
c. 2, 3 e 2.
d. 2, 3 e 1.
e. 3, 3 e 2.

Questão 3. A respeito das funções

$$S\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad S(p) = p - p' - p(0),$$

$$T\colon P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = \begin{bmatrix} p'(0) & p'(1)+1 \\ p'(2) & p'(3) \end{bmatrix},$$

$$P\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad P(p) = p(1)p',$$

em que p' denota a derivada de p, é correto afirmar que

a. apenas S e T são transformações lineares.
b. apenas P é uma transformação linear.
c. apenas S e P são transformações lineares.
d. S, T e P são transformações lineares.
e. apenas S é uma transformação linear.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e sejam U e W subespaços vetoriais de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base de U e $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de W, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de $U + W$.

(II) Se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base ortogonal de U, $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de W e $V = U \oplus W$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é uma base ortogonal de V.

(III) Se $\{u_1, \dots, u_r\} \subset U$ é um conjunto linearmente independente, $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W$ é um conjunto linearmente independente e $W \subset U^\perp$, então $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_k\}$ é um conjunto linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

a. (I), (II) e (III).
b. (II) e (III), apenas.
c. (II), apenas.
d. (III), apenas.
e. (I) e (II), apenas.

Questão 5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja S um subespaço de V. Assinale a afirmação **FALSA** acerca do operador linear $T\colon V \to V$, definido por $T(v) = \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

a. Qualquer $u \in S$, $u \neq 0_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor 1.

b. Se $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base de S, então $T(v) = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \frac{\langle v,u_r\rangle}{\|u_r\|^2}u_r$, para todo $v \in V$.

c. $\operatorname{Im}(T) = S$.

d. Qualquer $v \in V$ pode ser escrito como $v = u + w$, com $u \in S$ e $w \in S^\perp$.

e. $\operatorname{Ker} T = S^\perp$.

Questão 6. Seja λ um número real não nulo e diferente de 1 e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, pode-se afirmar corretamente que

a. 1 e λ são autovalores de T.

b. λ é o único autovalor de T.

c. T é diagonalizável.

d. $\operatorname{Ker}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

e. existe uma matriz invertível B tal que $B^{-1}AB = A^{\mathrm{t}}$.

Questão 7. A respeito de um espaço vetorial V de dimensão n, munido de um produto interno, é correto afirmar que

a. se $T\colon V \to V$ é um operador linear simétrico, então toda matriz de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ é a matriz de T em relação a alguma base ortonormal de V.
b. se $T\colon V \to V$ é um operador linear e existe uma base $\mathcal{B}$de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, então T é simétrico.
c. se A é uma matriz invertível em $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, então existem bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de V tais que $A = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.
d. 0 pode ser um autovalor do operador linear identidade I de V.
e. se $T\colon V \to V$ é um operador linear simétrico, então $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, qualquer que seja $\mathcal{B}$ base de V.

Questão 8. Seja n um inteiro positivo. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de uma matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Se A tem pelo menos um autovalor real, então existe um subespaço de dimensão 1 de $\mathbb{R}^n$ que é invariante por A.
b. Se A é diagonalizável e $A^2 = 0$, então $A = 0$.
c. Se A é semelhante a uma matriz diagonalizável, então A é diagonalizável.
d. Se todos os autovalores de A são nulos, então $A = 0$.
e. Se A é semelhante a $2A$, então todo autovalor de A é nulo.

Questão 9. Seja $T\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^4$ tenha entradas reais. Se $1+i$ e i são autovalores de T e $(1+i, 1, 1, 1)$ é um autovetor associado a $1+i$ e $(1, -i, 1, -i)$ é um autovetor associado a i, então $T(2+i, 1+i, 2, 1+i)$ é igual a

a. $(2+i, 1+i, 2, 1+i)$.
b. $(-i, 1, -i, 1)$.
c. $(i, 2+i, 1, 2+i)$.
d. $(2i, i, 2i+1, i)$.
e. $(2i, i+1, i+1, i+1)$.

Questão 10. Seja n um inteiro positivo, sejam $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Se λ é um autovalor de AB, com autovetor associado v, e $Bv \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, então λ

a. não é um autovalor de BA.

b. é um autovalor de BA com autovetor associado v.

c. é um autovalor de A com autovetor associado Bv.

d. é um autovalor de BA com autovetor associado Bv.

e. é um autovalor de B.

Questão 11. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Se $S = [1, t^2]$, então o polinômio de S mais proximo de $2 + t + t^2$

a. tem duas raízes reais distintas.

b. é constante.

c. tem uma raiz real de multiplicidade 2.

d. tem duas raízes complexas conjugadas distintas.

e. tem grau 1.

Questão 12. Sobre a matriz $A = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, em que a e b são números reais, é correto afirmar que

a. se A é diagonalizável, então $a = b = 0$.

b. se $b \neq 2$, então A é diagonalizável.

c. se $b = 1$, então A não é diagonalizável.

d. se $b = 1$ e A é diagonalizável, então $a = 0$.

e. se A é diagonalizável, então $b \neq 1$ e $b \neq 0$.

Questão 13. A matriz $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ possui autovalores $12, 18$ e 6, associados, respectivamente, aos autovetores $(1,0,1), (1,2,-1)$ e $(1,1,1)$. Se $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ é a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (3,2,3)$, então $x(1) - y(1) + 2z(1)$ é igual a

a. $2e^{18} - e^{12}$.
b. $2e^{6} + e^{18} - e^{12}$.
c. $3e^{12} + 4e^{6}$.
d. $2e^{6} - e^{12}$.
e. $3e^{6} + 2e^{18} - e^{12}$.

Questão 14. Seja V espaço um vetorial de dimensão n com produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear simétrico com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\lambda_1 = \lambda_n$, então $T = \lambda_1 I$.
(II) Se v e w são autovetores de T e $v \neq w$, então $\langle v, w\rangle = 0$.
(III) Para todo vetor unitário $v \in V$, tem-se $\langle T(v), v\rangle \geq \lambda_1$.

Está correto o que se afirma em

a. (I) e (II), apenas.
b. (II) e (III), apenas.
c. (I), (II) e (III).
d. (I), apenas.
e. (I) e (III), apenas.

Questão 15. Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 24 = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas de E^2, com base ortonormal. Então existe um sistema de coordenadas de E^2, com base ortonormal, com respeito ao qual Γ tem equação reduzida da forma

$$4u^2 + 9v^2 = k,$$

em que k é igual a

a. -1.
b. 2.
c. 1.
d. 0.
e. -2.

Questão 16. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$, é $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considerando $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual, analise as seguintes afirmações:

(I) $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
(II) $\mathcal{B}$ não é necessariamente uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, mas existe uma base ortonormal $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz simétrica.
(III) $\mathcal{B}$ é formada por autovetores de T.

Está correto o que se afirma em

a. (I) e (III), apenas.
b. (III), apenas.
c. (II) e (III), apenas.
d. (I), (II) e (III).
e. (I) e (II), apenas.

Gabarito do Aluno

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Tipo de prova: __________

Questão	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					