**1Q1.** Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço definido por:

$$S = [(1,1,2,0),(0,2,2,1)].$$

Se $u$ é o vetor de $S$ mais próximo de $v = (-1,3,2,8)$ então $\|u\|$ é igual a:

(a) $3\sqrt{6}$;
(b) $8$;
(c) $\sqrt{19}$;
(d) $54$;
(e) $2\sqrt{2}$.

**1Q2.** Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear não nulo tal que:

$$\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T).$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;
(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;
(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é falsa;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas;
(e) apenas a afirmação (III) é falsa.

**1Q3.** Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}),$$

e seja $S \subset P_2(\mathbb{R})$ o subespaço definido por $S = [2 + t - t^2, -3 + t^2]$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $p(t) = 1 + \alpha t + \beta t^2$ está em $S^{\perp}$ então $\alpha + \beta$ é igual a:

(a) $-\frac{3}{2}$;
(b) $-2$;
(c) $2$;
(d) $-4$;
(e) $\frac{3}{2}$.

**1Q4.** Considere em $M_2(\mathbb{R})$ o produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}A), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Sejam $S$ o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) : a - 2b + c + d = 0\right\}$$

e $V = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 3\end{smallmatrix}\right)$. Se $V = A + B$ com $A \in S$, $B \in S^{\perp}$ e se $B = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ então $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ é igual a:

(a) $-2$;
(b) 4;
(c) 2;
(d) 3;
(e) 1.

**1Q5.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,0,0) = -1 + t + t^2, \quad T(0,1,0) = 2 - t^2, \quad T(0,0,1) = -1 - t.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$;
(e) $T$ é sobrejetora.

**1Q6.** Sejam $V$ um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $S$ um subespaço de $V$ e $u, v \in V$ tais que $v \in S^{\perp}$ e $u - v \in S$. Pode-se afirmar que:

(a) $\langle u, v\rangle = 0$;
(b) $u \in S^{\perp}$;
(c) $u = 0$;
(d) $\langle u, v\rangle = \|v\|^2$;
(e) $\langle u, v\rangle = \|u\|$.

**1Q7.** Defina:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{3} p'(i)q'(i),$$

para todos $p, q \in P_3(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$ pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\langle \lambda p, q \rangle \neq \lambda \langle p, q \rangle$;

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$ pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p, q \rangle \neq \langle q, p \rangle$;

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$ pois existe $p \in P_3(\mathbb{R})$ não nulo tal que $\langle p, p \rangle = 0$;

(d) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(e) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$ pois existem $p, q, r \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p, q + r \rangle \neq \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$.

**1Q8.** Sejam $E$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $S$ um subespaço de $E$, $B$ um subconjunto de $S$ e $C$ um subconjunto de $S^\perp$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) se $B$ é uma base de $S$ e $C$ é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ é uma base de $E$;

(b) $B \cap C \subset \{0\}$;

(c) se $B$ e $C$ são linearmente independentes então $B \cup C$ é linearmente independente;

(d) se $B$ é uma base de $S$ e $C$ é uma base de $S^\perp$ então $B \cup C$ gera $E$, mas pode não ser linearmente independente;

(e) se $B$ gera $S$ e $C$ gera $S^\perp$ então $B \cup C$ gera $E$.

**1Q9.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(X) = AX$, $X \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ b & 0 & 2b & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $T$ não é injetora;

(b) se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$ então $T$ é injetora;

(c) $T$ é bijetora se e somente se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$;

(d) $T$ não é sobrejetora;

(e) se $a \neq 1$, $b \neq 0$ e $a + c \neq 2$ então $T$ não é bijetora.

**1Q10.** Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja $S$ o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0 \text{ e } y - w = 0\big\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $S^\perp = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 0 \text{ e } y + z = 0\big\}$;
(b) $S^\perp = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + z + w = 0 \text{ e } x + z = 0\big\}$;
(c) $S^\perp = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\big\}$;
(d) $S^\perp = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + z = 0 \text{ e } y + w = 0\big\}$;
(e) $S^\perp = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + z + w = 0 \text{ e } x + y = 0\big\}$.

**1Q11.** Considere em $P_3(\mathbb{R})$ o produto interno:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Seja $S \subset P_3(\mathbb{R})$ o subespaço $[1, t, t^2 + t]$. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que o polinômio $p(t) = at^2 + bt + c$ é o elemento de $S$ mais próximo de $t^3$ então $a + b + c$ é igual a:

(a) $\frac{2}{3}$;
(b) $\frac{3}{5}$;
(c) 1;
(d) 0;
(e) $\frac{3}{4}$.

**1Q12.** Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço definido por:

$$S = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)].$$

Se $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ é tal que $\mathrm{proj}_S\, u = (1, 0, 0, 1)$ então pode-se afirmar que $a - b + c - d$ é igual a:

(a) 2;
(b) $2c$;
(c) $2 - 2b$;
(d) $2b - 2$;
(e) $2 + 2c$.

**1Q13.** Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(p)(t) = p(0) + p(1)t + p''(2)t^2, \quad p \in P_3(\mathbb{R}).$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(b) $T$ é bijetora;

(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) > 1$;

(d) $T$ é sobrejetora;

(e) $T$ é injetora.

**1Q14.** Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $S_1$, $S_2$ subespaços de $V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$ se e somente se $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;

(II) dados $x, y \in V$ então $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$ se e somente se $x$ e $y$ são linearmente independentes;

(III) se $\dim(V) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$ então necessariamente $V = S_1 + S_2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**1Q15.** Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = (a + d, b - c, c + d, a - b), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$;

(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$;

(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;

(d) $T$ é sobrejetora;

(e) $T$ é bijetora.

**1Q16.** Seja $n$ um número natural e considere as funções

$$T : P_3(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R}), \quad G : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad S : C^n\big([-1,1]\big) \to C\big([-1,1]\big)$$

definidas por:

$$T(p) = (p')^2 - p'', \quad p \in P_3(\mathbb{R}),$$

$$G\Big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big)\Big) = (a + b + c + 1, b - c, a + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

$$S(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k, \quad f \in C^n\big([-1,1]\big),\ t \in [-1,1],$$

onde $f^{(k)}$ denota a $k$-ésima derivada da função $f$. Assinale a alternativa correta:

(a) $G$ e $S$ são lineares, $T$ não é linear;
(b) nenhuma das funções $T$, $G$, $S$ é linear;
(c) $T$ e $G$ são lineares, $S$ não é linear;
(d) as funções $T$, $G$, $S$ são lineares;
(e) $S$ é linear, $T$ e $G$ não são lineares.

**1Q17.** Se $S_1$ e $S_2$ são subespaços de um espaço vetorial $E$, $B_1$ é uma base de $S_1$ e $B_2$ é uma base de $S_2$ então a respeito de $B = B_1 \cup B_2$ pode-se afirmar que:

(a) é um conjunto linearmente independente, mas pode não gerar $S_1 + S_2$;
(b) é um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$, mas pode não ser linearmente independente;
(c) é uma base de $S_1 + S_2$;
(d) não é uma base de $S_1 + S_2$;
(e) pode não ser nem linearmente independente, nem um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$.

**1Q18.** Considere as seguintes afirmações:

(I) a função:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}),$$

é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(II) dados vetores $u$, $v$ em um espaço vetorial com produto interno então $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ se e somente se $u$ e $v$ são linearmente dependentes;

(III) se $E$ é um espaço vetorial com produto interno e $S$ é um subespaço de $E$ então $E = S \oplus S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhuma das afirmações é verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) todas as afirmações são verdadeiras.

**1Q19.** Seja $V$ um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja $k \in \mathbb{R}$. Defina:

$$\langle u, v\rangle' = k\langle u, v\rangle,$$

para todos $u, v \in V$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ é um produto interno em $V$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$;

(b) $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ é um produto interno em $V$ se e somente se $k < 0$;

(c) $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ é um produto interno em $V$ se e somente se $k \neq 0$;

(d) $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ é um produto interno em $V$ se e somente se $k = 0$;

(e) $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ é um produto interno em $V$ se e somente se $k > 0$.

**1Q20.** Seja $E$ um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de $E$ então:

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n,$$

para todo $x \in E$;

(II) se $u, v \in E$ são linearmente independentes e se $w = v - \operatorname{proj}_u v$ então $w$ é ortogonal a $u$ se e somente se $\|u\| = 1$;

(III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é linearmente independente e se

$$z = w - \operatorname{proj}_u w - \operatorname{proj}_v w$$

então $z$ é ortogonal a $u$ e a $v$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(e) nenhuma das afirmações é verdadeira.