1Q1. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $T : U \to U$ um operador linear e u e v vetores próprios de T associados respectivamente a valores próprios distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\dim(U) = 3$ e $\dim\big(V(\lambda)\big) = 2$ então T é diagonalizável;
(II) se T é simétrico então $V(\lambda) = V(\mu)^{\perp}$;
(III) se $\langle u, v\rangle = 0$ então T é simétrico.

Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) todas as afirmações são verdadeiras;
(c) somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) somente a afirmação (I) é verdadeira.

1Q 2. Sejam U um espaço vetorial de dimensão 5, B uma base de U e $T : U \to U$ o operador linear cuja matriz em relação à base B é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) T não é diagonalizável pois seu polinômio característico possui raízes que não são reais;
(b) T não é diagonalizável pois 1 é valor próprio de T com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 2;
(c) T não é diagonalizável pois 1 é valor próprio de T com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1;
(d) $V(1) = [(1, 0, 0, 0, 0)]$;
(e) T é diagonalizável.

1Q3. Considere as bases:

$$B = \{(1,1,1), (0,-1,0), (-1,0,1)\}, \quad C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) $[T^2]_B = ([T]_B)^2$;
(b) existe uma matriz inversível $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{CB} = M^{-1}[T]_C$;
(c) $[T]_B$ é inversível se e somente se $[T]_C$ é inversível;
(d) $[T]_C$ é semelhante a $[T]_B$;
(e) T é simétrico se e só se $[T]_B$ é simétrica.

1Q4. Sejam:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $n \geq 1$ um inteiro. Se:

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

então $\alpha + \beta - \gamma - \delta$ é igual a:

(a) $2 + 2^{n+1}$;
(b) 0;
(c) 2^{n+1};
(d) 1;
(e) 2.

1Q5. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é $p(t) = -(t-1)(t+1)(t-2)$. Uma matriz inversível M tal que:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

(a) $M = \left(\begin{smallmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$;

(b) $M = \left(\begin{smallmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

(c) $M = \left(\begin{smallmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

(d) $M = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

(e) $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1Q6. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

(I) os únicos valores próprios de T são 2 e -2;
(II) T é simétrico;
(III) $V(2) = [(0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,1)]$.

Temos que $T(3,-2,2,3)$ é igual a:

(a) $(6,4,4,6)$;
(b) $(-4,6,6,-4)$;
(c) $(6,4,-4,6)$;
(d) $(-6,-4,4,6)$;
(e) $(4,6,6,4)$.

1Q7. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita n e B uma base de U. Considere um operador linear $T : U \to U$ e seja $A = [T]_B$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) se uma das colunas de A é nula então $\dim\big(V(0)\big) \geq 1$;
(b) se A é inversível então T é diagonalizável;
(c) se n é ímpar então T possui vetores próprios;
(d) se T é diagonalizável e bijetor então T^{-1} é diagonalizável;
(e) se uma das linhas de A é nula então 0 é valor próprio de T.

1Q 8. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $S, T : U \to U$ operadores lineares. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) se u é vetor próprio de T associado a λ_1 e é também vetor próprio de S associado a λ_2 então u é vetor próprio de $S \circ T$ associado a $\lambda_1\lambda_2$;
(b) se U está munido de um produto interno e se S e T são operadores simétricos tais que $S \circ T = T \circ S$ então $S \circ T$ é um operador simétrico;
(c) se existe uma base B de U cujos vetores são vetores próprios de S e de T então $S \circ T = T \circ S$;
(d) se u é vetor próprio de T associado a λ_1 e também é vetor próprio de S associado a λ_2 então u é vetor próprio de $3T - 2S$ associado a $3\lambda_1 - 2\lambda_2$;
(e) se S e T são diagonalizáveis então $S \circ T = T \circ S$.

1Q9. Sejam U um espaço vetorial de dimensão 5, $T : U \to U$ um operador linear e $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$ seu polinômio característico. Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T + 2\mathrm{I})\big) = 1$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})\big) = 3$;
(c) T é sobrejetor;
(d) T não é diagonalizável pois $\dim(U) = 5$ e p possui apenas três raízes reais;
(e) T é diagonalizável se e somente se existem $v_1, v_2, v_3 \in U$, linearmente independentes, tais que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -v_2$ e $T(v_3) = -v_3$.

1Q10. Sejam U um espaço vetorial de dimensão 4 e $T : U \to U$ um operador linear não nulo tal que $T^4 = T \circ T \circ T \circ T = 0$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de T então $\lambda = 0$;

(b) T é diagonalizável;

(c) T não é sobrejetor;

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 1$;

(e) se $\{u, v, w, t\}$ é uma base de U tal que $\mathrm{Ker}(T) = [u, v, w]$ então t não é um vetor próprio de T.

1Q11. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3, $T : V \to V$ um operador linear e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ f & a & 0 \\ d & c & b \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) se $f \neq 0$ então T é diagonalizável;

(b) se $f = 0$ e $a \neq b$ então T é diagonalizável;

(c) se $c \neq 0$ e $a = b$ então T não é diagonalizável;

(d) se $f \neq 0$ e $a = b$ então T não é diagonalizável;

(e) se $d \neq 0$ e $a = b$ então T não é diagonalizável.

1Q12. Sejam $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ uma base de $\mathbb{R}^5$ e $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ o operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) o subespaço $[v_2, v_5]$ é invariante por T;

(II) o subespaço $[v_5]$ é o único subespaço invariante por T;

(III) o subespaço $[v_2, v_3, v_5]$ é invariante por T.

Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas a afimação (III) é verdadeira;

(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(e) todas as afirmações são falsas.

1Q13. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador linear tal que:

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(1,2,0),(2,1,0)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T + 3\mathrm{I}) = [(0,0,1)],$$

então:

(a) $T(5,1,-2) = (7,1,-6)$;

(b) $T(5,1,-2) = (5,1,6)$;

(c) $T(5,1,-2) = (5,1,-6)$;

(d) não é possível calcular $T(5,1,-2)$ apenas com os dados fornecidos;

(e) $T(5,1,-2) = (7,1,6)$.

1Q 14. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se o polinômio característico de T é $p(t) = t^2(t-1)^2$ e se $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão 2 então T é diagonalizável;

(II) se T é bijetor e λ é valor próprio de T com multiplicidade algébrica igual a 3 então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de T^{-1} com multiplicidade algébrica igual a 3;

(III) se λ é valor próprio de T e $T^2 = T$ então $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

1Q 15. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) T é simétrico;

(b) o polinômio característico de T possui uma única raiz real;

(c) T não é injetor;

(d) T possui três valores próprios distintos;

(e) T possui dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 tais que $\dim\big(V(\lambda_1)\big) = 1$ e $\dim\big(V(\lambda_2)\big) = 1$.

1Q16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cujos valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Suponha que $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$ sejam vetores próprios associados a λ_1 e a λ_2, respectivamente. Considere a base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Assinale a alternativa **VERDADEIRA**.

(a) $T^{10}(3, 2) = (3, 2^{11})$;
(b) $T^{10}(3, 2) = (3, 2^{11})_B$;
(c) $T^{10}(3, 2) = (1, 2^{11})_B$;
(d) $T^{10}(3, 2) = (1, 2^{11})$;
(e) não é possível calcular $T^{10}(3, 2)$ apenas com os dados fornecidos.

1Q17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico p. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) se $p(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_k - t)$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dois a dois distintos então T é diagonalizável;
(b) se $p(t) = (2 - t)(1 - t)^2(1 + t + t^2)$ e $\dim\big(V(1)\big) = 2$ então T é simétrico;
(c) se T é simétrico e λ, μ são valores próprios distintos de T então $V(\lambda)$ está contido em $V(\mu)^\perp$;
(d) se T é simétrico e B é uma base ortonormal de V então $[T]_B$ é diagonalizável;
(e) se T é simétrico e B é uma base ortonormal de V então existe uma matriz inversível M tal que $M^{\mathrm{t}}[T]_B M$ é diagonal.

1Q18. Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n > 4$, $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (1-t)(2-t)^3(3-t)^{n-4}$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) T é diagonalizável se e somente se
$$\dim\big(\mathrm{Im}(T - 3\mathrm{I})\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) = 1;$$

(b) T é diagonalizável se e somente se
$$V = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) + \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) + \mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I});$$

(c) T é diagonalizável se e somente se
$$\dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - 3\mathrm{I})\big) = n;$$

(d) T é diagonalizável se e somente se
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I})\big) = n;$$

(e) T é diagonalizável se e somente se
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I})\big) = n - 1.$$

1Q19. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos valores próprios são 1 e 2. Se:
$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(1, -1, 0), (1, 0, 1)]$$
então um vetor que gera $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})$ é:

(a) $(1, 1, -1)$;
(b) $(2, 0, -1)$;
(c) $(2, 2, 1)$;
(d) $(-1, 0, 2)$;
(e) $(2, 1, -2)$.

1Q20. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, W um subespaço vetorial de V e $T : V \to V$ o operador linear definido por $T(v) = \text{proj}_W v$, para todo $v \in V$, onde $\text{proj}_W v$ denota a projeção ortogonal de v em W. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) $T^2 = T$;

(b) T é um operador simétrico;

(c) $\text{Ker}(T) = W^\perp$ e $\text{Im}(T) = W$;

(d) T é um operador diagonalizável;

(e) $V \neq V(0) + V(1)$.