

**Q1.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\{v_1, v_2\}$  uma base de  $V$ . Considere a função  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2$ , para todo  $v \in V$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $T$  é sobrejetora;
- (b)  $T$  não é injetora;
- (c)  $T$  não é linear;
- (d)  $v_1$  e  $v_2$  são autovetores de  $T$ ;
- (e)  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ .

**Q2.** Sejam  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  operadores lineares que são representados na base canônica de  $\mathbb{R}^3$  pelas matrizes:

$$[S]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere a base:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

de  $\mathbb{R}^3$ . Assinale a alternativa correspondente a um vetor que gera  $\text{Ker}(S \circ T)$ :

- (a)  $(0, 2, -1)_{\mathcal{B}}$ ;
- (b)  $(-1, 2, 1)_{\mathcal{B}}$ ;
- (c)  $(0, 1, -2)_{\mathcal{B}}$ ;
- (d)  $(0, -1, 2)_{\mathcal{B}}$ ;
- (e)  $(1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$ .

**Q3.** Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno em  $\mathbb{R}^3$ . Sejam  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  autovetores de  $T$  associados aos autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente. Se  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ,  $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$  e  $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$ , pode-se afirmar que:

- (a)  $T$  é diagonalizável;
- (b) todo autovetor de  $T$  é paralelo a  $v_1$ , a  $v_2$  ou a  $v_3$ ;
- (c)  $T$  é diagonalizável se e somente se os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são dois a dois distintos;
- (d)  $T$  não é diagonalizável;
- (e)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ .

**Q4.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear cujo polinômio característico é  $p_T(t) = -t^3 + 3t^2 + t - 6$ . Pode-se afirmar que:

- (a) não existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $T^n$  é o operador identidade;
- (b) existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $T^n$  é o operador identidade;
- (c) existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $T^n$  é o operador nulo;
- (d) existe um inteiro  $n \geq 2$  tal que  $T^n = T$ ;
- (e)  $T$  não é diagonalizável.

**Q5.** Recorde que o *traço*  $\text{tr}(X)$  de uma matriz quadrada  $X$  é a soma dos elementos de sua diagonal principal e que matrizes semelhantes possuem o mesmo traço. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Tem-se que  $\text{tr}(A^5 - 2A)$  é igual a:

- (a) 27;
- (b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1$ ;
- (c) 28;
- (d)  $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ ;
- (e) 26.

**Q6.** Seja  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  um operador linear com polinômio característico:

$$p_T(t) = -t^a(t - \lambda)^b(t - \mu)^c,$$

onde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  são não nulos e distintos e  $a, b, c > 0$  são inteiros. Se:

$$\dim(V_\lambda(T)) + \dim(V_\mu(T)) = 4,$$

então:

- (a)  $T$  é diagonalizável;
- (b)  $T$  não é diagonalizável pois  $T$  não é injetor;
- (c) não podemos garantir que  $T$  seja diagonalizável;
- (d)  $T$  não é diagonalizável pois  $\dim(V_\lambda(T)) > \dim(V_\mu(T))$ ;
- (e)  $T$  é sobrejetor.

**Q7.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear cuja matriz em relação à base canônica seja:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de  $T$  é  $p_T(t) = -(t+1)^2(t+2)$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  é diagonalizável;
- (b)  $T$  não é diagonalizável pois a multiplicidade algébrica do autovalor  $-1$  é 2;
- (c)  $T$  não é diagonalizável pois a multiplicidade geométrica do autovalor  $-1$  é 1;
- (d)  $T$  não é diagonalizável pois  $p_T$  tem raízes múltiplas;
- (e)  $T$  não é diagonalizável por não ser injetor.

**Q8.** Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear com polinômio característico  $p_T$ . Se o polinômio característico de  $T^2$  é:

$$p_{T^2}(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

com  $a_0 \neq 0$ , pode-se afirmar que:

- (a)  $T$  é invertível;
- (b)  $T$  não é injetor;
- (c)  $T$  não é diagonalizável pois  $p_T$  não tem raízes reais;
- (d)  $p_T$  possui uma raiz complexa não real;
- (e) se  $p_T$  tiver raízes múltiplas então  $T$  não será diagonalizável.

**Q9.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Se  $(x, y, z) \in \text{Ker}(T)$  é tal que  $z$  é um número inteiro, pode-se afirmar que  $x + y + z$  é um múltiplo de:

- (a) 9;
- (b) 4;
- (c) 5;
- (d) 6;
- (e) 7.

**Q10.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , se  $(a, b, c) = T(x, y)$ , pode-se afirmar que  $a + b + c$  é igual a:

- (a)  $3x$ ;
- (b)  $2x + y$ ;
- (c)  $x + 2y$ ;
- (d)  $3x + y$ ;
- (e)  $x$ .

**Q11.** Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (b)  $T$  é sobrejetora;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ ;
- (d)  $T$  é injetora;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3$ .

**Q12.** Seja  $T : E \rightarrow E$  um operador linear, onde  $E$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que  $\dim(\text{Im}(T)) = 1$  e que  $T^2 \neq 0$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  é diagonalizável;
- (b) o polinômio característico de  $T$  pode não ter raízes reais;
- (c) o polinômio característico de  $T$  pode ter alguma raiz complexa não real;
- (d) o polinômio característico de  $T$  só tem raízes reais e  $T$  pode ter um autovalor cuja multiplicidade algébrica é maior do que a multiplicidade geométrica;
- (e) o polinômio característico  $p_T$  de  $T$  só tem raízes reais e pode existir uma raiz  $\alpha \in \mathbb{R}$  de  $p_T$  tal que a dimensão de  $\text{Ker}(T - \alpha I)$  é menor do que a multiplicidade de  $\alpha$  como raiz de  $p_T$ .

**Q13.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\alpha$  é uma raiz real do polinômio característico de um operador linear  $T$  num espaço vetorial de dimensão finita então  $\alpha$  é um autovalor de  $T$ ;
- (II) é possível encontrar um operador linear  $T$  num espaço vetorial de dimensão finita e um autovalor  $\lambda$  de  $T$  tal que a dimensão do espaço  $\text{Ker}(T - \lambda I)$  seja maior do que a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $T$ ;
- (III) se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um operador linear,  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  é um número real e  $A$  é a matriz  $[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I \in M_n(\mathbb{R})$  então um vetor não nulo  $x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  é autovetor de  $T$  com autovalor  $\lambda$  se e somente se:

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) as três afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q14.** Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimensão 3,  $T : E \rightarrow E$  um operador linear,  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sabendo-se que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar que  $T$  **NÃO** é diagonalizável se e somente se:

- (a)  $a = 0$  e  $b \neq 0$ ;
- (b)  $a = b$ ;
- (c)  $a \neq 0$ ;
- (d)  $a = b = 0$ ;
- (e)  $b \neq 0$ .

**Q15.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) a matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  não é semelhante a uma matriz diagonal;
- (II) se uma matriz  $A$  não é diagonalizável então  $A^2$  também não é diagonalizável;
- (III) se  $a, b, c \in \mathbb{R}$  então a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q16.** Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  operadores lineares tais que:

$$S(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e tais que a matriz que representa  $S \circ T$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é:

$$[S \circ T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que o traço da matriz  $[T]_{\text{can}}$  (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de  $[T]_{\text{can}}$ ) é igual a:

- (a) 1;
- (b) 2;
- (c) -1;
- (d) -2;
- (e) 4.