Em todas as questões envolvendo equações de cônicas ou quádricas, o sistema de coordenadas considerado é ortogonal.

1Q1. Sejam $D, F \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária e suficiente para que a cônica de equação $x^2 - y^2 + 2Dx + F = 0$ seja uma hipérbole é:

(a) $D^2 - F > 0$;
(b) $D^2 - F < 0$;
(c) $D > 0$ e $F > 0$;
(d) $D^2 - F \neq 0$;
(e) $D^2 - F = 0$.

1Q2. As matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfazem:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere a quádrica de equação $x^2 + y^2 + 2xy - 4\sqrt{2}\,x + 2 = 0$. Uma equação reduzida para essa quádrica é:

(a) $u^2 - v + 2 = 0$;
(b) $u^2 - 2v = 0$;
(c) $u^2 + v + 2 = 0$;
(d) $u^2 + 3v = 0$;
(e) $u^2 + v^2 + 2 = 0$.

1Q3. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz complexa arbitrária e se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A então o conjugado $\bar{\lambda}$ é necessariamente um autovalor de A;

(II) se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear e se existe uma base B de $\mathbb{C}^n$ tal que a matriz $[T]_B$ seja real então pode-se concluir que para todo autovalor λ de T, o conjugado $\bar{\lambda}$ é também um autovalor de T que possui a mesma multiplicidade algébrica que λ;

(III) se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear que é representado por uma matriz real na base canônica de $\mathbb{C}^n$ então *todo* elemento de $\mathrm{Ker}(T)$ está em $\mathbb{R}^n$.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhuma das afirmações é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

1Q4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a \neq 0$;
(b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(c) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $b = 0$;
(d) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $b \neq 0$;
(e) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se e somente se $a = 0$.

1Q5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. A matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

é diagonalizável se e somente se:

(a) $a \neq 1$ e $c = 0$;
(b) $a \neq 1$ e $c \neq 0$;
(c) $b \neq 0$;
(d) $a = 1$ e $c \neq 0$;
(e) $a = 1$ e $c = 0$.

1Q6. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz *real* $A \in M_3(\mathbb{R})$ com autovalores 3, $3 + i$ e $3 - i$. Se:

$$\mathrm{Ker}(T - 3\mathrm{I}) = [(0, 0, 1)] \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Ker}\big(T - (3 + i)\mathrm{I}\big) = [(1, i, 0)]$$

então a solução geral (real) do sistema $X'(t) = AX(t)$ é:

(a) $X(t) = \big(c_2 e^t \cos(3t) + c_3 e^t \operatorname{sen}(3t), c_2 e^t \operatorname{sen}(3t) + c_3 e^t \cos(3t), c_1 e^{3t}\big),$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(b) $X(t) = e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t, c_1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(c) $X(t) = e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, -c_2 \operatorname{sen} t - c_3 \cos t, c_1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(d) $X(t) = \big(c_2 e^t \cos(3t) + c_3 e^t \operatorname{sen}(3t), -c_2 e^t \operatorname{sen}(3t) + c_3 e^t \cos(3t), c_1 e^{3t}\big),$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(e) $X(t) = e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, -c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t, c_1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1Q7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(t) = (a - t, b - t, c - t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Se X é solução do sistema:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

então:

(a) $2a + b + c = 0$;
(b) $b = 0$ e $c = 0$;
(c) $a + b + c = 1$;
(d) $2a + b - c = 0$;
(e) $a + b - c = -1$.

1Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (ax - by, bx + ay),$$

para todos $x, y \in \mathbb{C}$. Assinale a alternativa correta.

(a) T é diagonalizável para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;
(b) T é diagonalizável se e somente se $a = 0$;
(c) T é diagonalizável se e somente se $a \neq 0$;
(d) T é diagonalizável se e somente se $b = 0$;
(e) T é diagonalizável se e somente se $b \neq 0$.

1Q9. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que:

$$M^{\mathrm{t}}AM = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

pode-se deduzir que uma equação reduzida para a quádrica:

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 8\sqrt{6}\,z - 26 = 0$$

é:

(a) $-4u^2 - 4v^2 + 2t^2 = 1$;
(b) $4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 26$;
(c) $-2u^2 - 2v^2 + t^2 = 1$;
(d) $4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 1$;
(e) $2u^2 + 2v^2 - t^2 = 1$.

1Q10. A solução geral do sistema:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t)$$

é:

(a) $c_1e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + c_2e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) + c_3e^{2t}(0,1,0),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(b) $c_1e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) + c_2e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) + c_3e^{2t}(0,0,1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(c) $c_1e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + c_2e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) + c_3e^{2t}(0,0,1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(d) $c_1e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) + c_2e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, 0) + c_3e^{2t}(0,0,1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(e) $c_1e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + c_2e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) + c_3e^{2t}(1,0,0),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1Q11. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se a função constante $X(t) = (a, b, c)$ é solução do sistema:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

então:

(a) $a + b + c = 0$;
(b) $a + b + c = 1$;
(c) $a + b + c = -2$;
(d) $a + b + c = -1$;
(e) $a + b + c = 2$.

1Q12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{R}^3$ por uma matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ com autovalores 1 e -1. Se:

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(1, 1, 1)] \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Ker}(T + \mathrm{I}) = [(0, 1, 1), (0, 0, 1)]$$

então a solução do sistema $X'(t) = AX(t)$ que satisfaz $X(0) = (1, 2, 2)$ é:

(a) $X(t) = (e^t, 2e^{-t}, 2e^{-t})$;
(b) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, e^t + e^{-t})$;
(c) $X(t) = (e^t, e^t + e^{-t}, e^t + e^{-t})$;
(d) $X(t) = (e^{-t}, 2e^t, 2e^t)$;
(e) $X(t) = (e^t, e^{-t}, e^{-t})$.

1Q13. A solução geral do sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

é:

(a) $c_1 e^{3t}(1,1) + c_2(1,2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
(b) $c_1 e^{3t}(1,1) + c_2 e^{3t}(1,-2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
(c) $c_1(1,1) + c_2(1,-2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
(d) $c_1 e^{3t}(1,-1) + c_2(1,-2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
(e) $c_1 e^{3t}(1,1) + c_2(1,-2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1Q14. Considere a quádrica de equação $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e seja $k \in \mathbb{R}$. A intersecção dessa quádrica com o plano $z = k$ é vazia se e somente se:

(a) $k \geq -1$;
(b) $k < -1$ ou $k > 1$;
(c) $k \leq 1$;
(d) $-1 < k < 1$;
(e) $-1 \leq k \leq 1$.

1Q15. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se I denota a matriz identidade 2×2 então A^{100} é igual a:

(a) $-2^{50}\,\mathrm{I}$;
(b) $-2^{100}\,\mathrm{I}$;
(c) $2^{50}A$;
(d) $2^{100}\,\mathrm{I}$;
(e) $2^{50}\,\mathrm{I}$.

1Q16. A cônica de equação $y^2 - x^2 - (y - x) = 0$ é:

(a) um par de retas paralelas;
(b) uma hipérbole;
(c) uma elipse;
(d) um par de retas concorrentes;
(e) uma reta.

1Q17. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

e seja n um inteiro positivo. Assinale a alternativa correta:

(a) $-A^n$ é a matriz identidade se e somente se n é múltiplo de 4;
(b) $-A^n$ é a matriz identidade se e somente se n é par;
(c) A^n é a matriz identidade se e somente se n é par;
(d) A^n é a matriz identidade se e somente se n é múltiplo de 8;
(e) A^n é a matriz identidade se e somente se n é múltiplo de 4.

1Q18. Seja $C \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária e suficiente para que a cônica de equação $x^2 + y^2 + 2Cxy - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$ seja uma parábola é:

(a) $C = 0$;
(b) $C = 1$;
(c) $C = 1$ ou $C = -1$;
(d) $C = -1$;
(e) $C \neq 0$.

1Q19. Considere a quádrica de equação $3x^2 + 2y^2 + 4yz - z^2 - 1 = 0$. Uma equação reduzida para essa quádrica é:

(a) $3u^2 + 3v^2 - 2t^2 = 1$;
(b) $3u^2 - 3v^2 - 2t^2 = 1$;
(c) $3u^2 + 3v^2 - 2t^2 = -1$;
(d) $3u^2 + 3v^2 + 2t^2 = 1$;
(e) $3u^2 + 2v^2 - t^2 = 1$.

1Q20. Seja $F \in \mathbb{R}$. A cônica de equação $9x^2 + y^2 - 6xy = 10F^2$ é:

(a) um par de retas paralelas se e somente se $F < 0$;
(b) um par de retas concorrentes se e somente se $F > 0$;
(c) um par de retas paralelas se e somente se $F \neq 0$;
(d) um par de retas paralelas se e somente se $F > 0$;
(e) um par de retas concorrentes se e somente se $F \neq 0$.