

Nesta prova, se V é um espaço vetorial e u_1, \dots, u_n são vetores de V , o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$.

Sempre que V tiver uma base canônica, ela será denotada por **can**.

Se V estiver munido de um produto interno e W for um subespaço de V , a projeção ortogonal de um vetor $x \in V$ sobre W , se existir, será denotada por $\text{proj}_W x$.

Se λ é um autovalor de um operador linear, então o auto-espaço associado a λ será denotado por $V(\lambda)$.

Se M é uma matriz, a matriz transposta de M será denotada por M^t .

As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas com respeito a um sistema ortogonal de coordenadas.

Q1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$. Então, a matriz $\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ é diagonalizável

sobre \mathbb{C} se, e somente se,

- (a) $a \neq i$ e $c = 0$.
- (b) $a \neq i$ e $c \neq 0$.
- (c) $a = i$ e $b = 0$.
- (d) $a = i$ e $c = 0$.
- (e) $a \neq i$ e $b = 0$.

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e sejam λ e μ raízes do polinômio característico de A . Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de \mathbb{R}^3 seja A . Considere as seguintes afirmações:

- (I) λ e μ são números reais.
- (II) Existe uma matriz $M \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $M^t A M$ é uma matriz diagonal.
- (III) $V(\lambda) = V(\mu)^\perp$.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (I) e (III) são sempre verdadeiras.
- (b) Apenas a afirmação (III) é sempre verdadeira.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (II) são sempre verdadeiras.
- (d) Apenas as afirmações (II) e (III) são sempre verdadeiras.
- (e) Apenas a afirmação (I) é sempre verdadeira.

Q3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $u, v \in V$ e seja W um subespaço de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) O operador linear $T: V \rightarrow V$ definido por $T(x) = x - \text{proj}_W x$, para todo $x \in V$, é simétrico.
- (II) O operador linear $S: V \rightarrow V$ definido por $S(x) = \langle x, u \rangle v + \langle x, v \rangle u$, para todo $x \in V$, é simétrico se, e somente se, u é ortogonal a v .
- (III) O operador linear $P: V \rightarrow V$ definido por $P(x) = \langle x, u \rangle v$, para todo $x \in V$, não é simétrico, quaisquer que sejam u e v .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q4. A solução geral do sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X(t)$$

é

- (a) $c_1 e^t (\cos t, \sin t, \cos t) + c_2 e^t (\sin t, -\cos t, \sin t) + c_3 e^t (1, 0, 0)$,
onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- (b) $c_1 e^t (\cos t, -\sin t, \cos t) + c_2 e^t (\sin t, \cos t, -\sin t) + c_3 e^t (1, 0, 0)$,
onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- (c) $c_1 e^t (\cos t, -\sin t, \cos t) + c_2 e^t (\sin t, \cos t, \sin t) + c_3 e^t (1, 0, 0)$,
onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- (d) $c_1 e^t (\cos t, -\cos t, \cos t) + c_2 e^t (\sin t, \sin t, \sin t) + c_3 e^t (1, 0, 0)$,
onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- (e) $c_1 e^t (\cos t, \sin t, \cos t) + c_2 e^t (-\sin t, \cos t, \sin t) + c_3 e^t (1, 0, 0)$,
onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Q5. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sabendo

que $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ são autovalores de T e que

$$V(0) = [(1, 0, -1)], \quad V(\sqrt{2}) = [(1, \sqrt{2}, 1)], \quad V(-\sqrt{2}) = [(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})],$$

dada uma quádrlica de equação $2xy + 2yz + 4y = 2$, uma equação reduzida para essa quádrlica é

- (a) $s^2 + t^2 = \sqrt{2}$.
- (b) $s^2 - t^2 = 1$.
- (c) $\sqrt{2}s^2 - \sqrt{2}t^2 = 1$.
- (d) $s^2 - t^2 = \sqrt{2}$.
- (e) $s^2 - t^2 = 2$.

Q6. Seja $b \in \mathbb{R}$ e considere uma cônica de equação $3x^2 + 2bxy + 3y^2 - 6x + 3 = 0$.

Considere as seguintes afirmações:

- (I) A cônica é uma parábola se, e somente se, $b = 3$ ou $b = -3$.
- (II) A cônica é uma elipse se, e somente se, $b \neq 0$, $b \neq 3$ e $b \neq -3$.
- (III) A cônica é um par de retas concorrentes se, e somente se, $b = 0$.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (e) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q7. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} munido de um produto interno e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T e seja S um subespaço de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se T é simétrico e S é invariante por T , então S^\perp é invariante por T .
- (II) O subespaço $V(\lambda)$ é invariante por T .
- (III) O subespaço $V(\lambda)^\perp$ é invariante por T .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (b) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q8. Se uma cônica possui equação $2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 1$, então uma equação reduzida para essa cônica é

- (a) $r^2 + t^2 = 1$.
- (b) $r^2 - t^2 = 2$.
- (c) $r^2 - t^2 = 0$.
- (d) $r^2 - t^2 = 1$.
- (e) $r^2 + 2\sqrt{2}t = 1$.

Q9. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que os únicos autovalores de T sejam -1 e 1 , e $V(-1) = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$. Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $T(x, y, z) = (a, b, c)$, então podemos afirmar que $a + b + c$ é igual a

- (a) $-x + y - z$.
- (b) $-x - y - z$.
- (c) $x - y - z$.
- (d) $-x + y + z$.
- (e) $-x - y + z$.

Q10. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz que satisfaz $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, então a solução do sistema $X'(t) = AX(t)$ que verifica $X(0) = (1, 2, 3)$ é

- (a) $X(t) = (e^{-t}, 2e^t + e^{-t}, 3e^t)$.
- (b) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$.
- (c) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$.
- (d) $X(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$.
- (e) $X(t) = (e^t, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$.

Q11. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico com autovalores 0 e 1 e que satisfaz $\text{Ker}(T) = [(-1, 1, 1), (-1, 1, -1)]$. Então, uma matriz ortogonal $M \in M_3(\mathbb{R})$ que verifica

$$M^t[T]_{\text{can}}M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é}$$

(a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por

$$T(z_1, z_2) = (az_1 + (a^2 + b^2)z_2, -z_1 - az_2), \quad \text{para todo } (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Podemos afirmar que T é diagonalizável se, e somente se,

(a) $b > 0$.

(b) $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

(c) $b \neq 0$.

(d) $b \geq 0$.

(e) $a \neq 0$.

Q13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$. Podemos afirmar que A é diagonalizável sobre \mathbb{C} se, e somente se,

- (a) $a \neq b$.
- (b) $a = b$.
- (c) $a = 0$.
- (d) $a \neq 0$ ou $a = b = 0$.
- (e) $a = 0$ e $b \neq 0$.

Q14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} com produto interno e seja B uma base de V . Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear com polinômio característico p_T . Considere as seguintes afirmações:

(I) O operador T é simétrico se, e somente se, todas as raízes de p_T são reais.

(II) O operador T é simétrico se, e somente se, T é diagonalizável.

(III) O operador T é simétrico se, e somente se, a matriz $[T]_B$ é simétrica.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
- (b) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
- (c) As afirmações (I), (II) e (III) são falsas.
- (d) Apenas a afirmação (III) é falsa.
- (e) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.

Q15. Seja n um inteiro positivo e seja $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear de \mathbb{C}^n como um espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $a + bi$ é um autovalor de T , então $a - bi$ também é um autovalor de T .
- (II) Se n é ímpar, então T tem pelo menos um autovalor real.
- (III) Se $[T]_{\text{can}} \in M_n(\mathbb{R})$ e $u + vi$ é um autovetor de T , com $u, v \in \mathbb{R}^n$, então $u - vi$ também é um autovetor de T .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q16. Sejam $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 . Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} a & 3 & -c \\ a & b & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix}.$$

Considerando \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual, podemos afirmar que T é um operador simétrico se, e somente se,

- (a) $a - b - c = 2$.
- (b) $a - b - c = 3$.
- (c) $a + b - c = 3$.
- (d) $a + b + c = 3$.
- (e) $a - b + c = 3$.