

**1Q1.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno,  $W$  um subespaço de  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por  $T(v) = \text{proj}_W v$ , para todo  $v \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**:

- (a)  $W = \text{Im}(T)$  e  $W^\perp = \text{Ker}(T)$ ;
- (b)  $W \neq (\text{Ker}(T))^\perp$ ;
- (c)  $W = \text{Ker}(T - I)$  e  $W^\perp = \text{Ker}(T)$ ;
- (d)  $T^3 = T^2$ ;
- (e)  $T$  é um operador simétrico.

**1Q2.** Sejam  $B = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  uma base de  $\mathbb{R}^5$  e  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  o operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $[v_2, v_5]$  é invariante por  $T$ ;
- (II) o subespaço  $[v_5]$  é invariante por  $T$ ;
- (III) o subespaço  $[v_1, v_3, v_4]$  é invariante por  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**1Q3.** Sejam  $U$  um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $T : U \rightarrow U$  um operador linear e  $u, v$  vetores próprios de  $T$  associados respectivamente a valores próprios distintos  $\lambda$  e  $\mu$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\dim(U) = 4$  e  $\dim(\text{Ker}(T - \mu I)) = 2$ , pode-se concluir que  $T$  é diagonalizável;
- (II) se  $T$  é simétrico, pode-se concluir que  $U = \text{Ker}(T - \lambda I) \oplus \text{Ker}(T - \mu I)$ ;
- (III) se  $\langle u, v \rangle = 0$ , pode-se concluir que  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) somente a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**1Q4.** Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - b + c - d, a - b, c - d),$$

para todos  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Im}(T)) = 1$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (c)  $\text{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$ ;
- (d)  $\text{Ker}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ .

**1Q5.** Sejam  $S$  e  $T$  subespaços não nulos de dimensão finita de um espaço vetorial  $E$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $S \cap T = \{0\}$  então  $S \cup T = S \oplus T$ ;
- (II) se  $T \subset S$  então  $\dim(T + S) \neq \dim(T) + \dim(S)$ ;
- (III)  $\dim(S + T) \leq \dim(S) + \dim(T)$ ;

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**1Q6.** Um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas possui matriz de coeficientes  $A \in M_3(\mathbb{R})$ . Sabendo que:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então a solução  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  desse sistema, satisfazendo a condição inicial  $X(0) = (1, 3, 2)$  é:

- (a)  $(e^t, e^t + 2, e^t + 1)$ ;
- (b)  $(e^t, 3, e^t + 1)$ ;
- (c)  $(e^t, e^t + 2, e^{-t} + 1)$ ;
- (d)  $(e^{-t}, e^t + 2, e^{-t} + 1)$ ;
- (e)  $(1, e^t + 2, e^{-t} + 1)$ .

**1Q7.** Sejam  $U$  um espaço vetorial real de dimensão 5,  $T : U \rightarrow U$  um operador linear e  $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$  seu polinômio característico. Pode-se concluir que:

- (a)  $T$  não é diagonalizável pois  $\dim(U) = 5$  e  $p$  possui apenas três raízes reais;
- (b)  $T - 2I$  não é sobrejetora;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$ ,  $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T - I)) = 3$ ;
- (d)  $\dim(\text{Ker}(T)) > 1$ ;
- (e)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 3$ .

**1Q8.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^3$  é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) não existem  $a$  e  $b$  que tornem  $T$  injetora;
- (b)  $T$  é bijetora para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $T$  é bijetora para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \neq b$ ;
- (d) não existem  $a, b \in \mathbb{R}$  que tornem  $T$  sobrejetora;
- (e)  $T$  é bijetora se  $a = b$ .

**1Q9.** Considere as funções  $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ ,  $G : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  e  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas por:

$$F(p)(t) = p(0) + p(1)t, \quad p \in P_2(\mathbb{R}),$$

$$G(q)(t) = tq(t) + q'(t), \quad q \in P_1(\mathbb{R}),$$

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b + c, a - c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Im}(T \circ G \circ F)) = 2$ ;
- (b)  $T \circ G$  é sobrejetora;
- (c)  $T \circ G \circ F$  é injetora;
- (d) somente as funções  $T$  e  $F$  são lineares;
- (e)  $G \circ F$  é bijetora.

**1Q10.** A solução geral do sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 5x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t), \end{cases}$$

é:

- (a)  $((c_1 + 2c_2) \cos(2t) + (c_2 - 2c_1) \sin(2t), c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $((c_1 - 2c_2) \cos(2t) + (c_2 + 2c_1) \sin(2t), c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $((c_1 + 2c_2) \cos t + (c_2 - 2c_1) \sin t, c_1 \cos t + c_2 \sin t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $c_1 e^{2t}(2, 1) + c_2 e^{-2t}(1, 2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $((c_1 + 2c_2) \cos(2t) + (c_2 - 2c_1) \sin(2t), c_1 \cos(2t) - c_2 \sin(2t)), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**1Q11.** Sejam  $A, B, C \in \mathbb{R}$  e considere a cônica de equação:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

relativamente a um sistema de coordenadas ortogonal. Se  $AC - B^2 < 0$  então essa cônica é:

- (a) um par de retas;
- (b) uma elipse;
- (c) uma parábola;
- (d) o conjunto vazio;
- (e) uma hipérbole.

**1Q12.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear cujos autovalores sejam  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ . Suponha que  $v_1 = (1, -1)$  e  $v_2 = (1, 1)$  sejam autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Temos que  $T^{2008}(-2, 2)$  é igual a:

- (a)  $(2, -2)$ ;
- (b) não é possível calcular  $T^{2008}(-2, 2)$  apenas com os dados fornecidos;
- (c)  $(-2, 2^{2008})$ ;
- (d)  $(2^{2008}, 2^{2008})$ ;
- (e)  $(-2, 2)$ .

**1Q13.** Considere as bases:

$$B = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), (0, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right), \quad C = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear. Supondo  $\mathbb{R}^3$  munido de seu produto interno canônico, assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**:

- (a) se a matriz  $[T]_B$  é diagonalizável então a matriz  $[T]_C$  é diagonalizável;
- (b) não existe uma matriz invertível  $M \in M_3(\mathbb{R})$  tal que  $[T]_C$  é igual a  $M^{-1}[T]_B M$ ;
- (c) se a matriz  $[T]_B$  é simétrica então a matriz  $[T]_C$  é simétrica;
- (d)  $[T^2]_B = ([T]_B)^2$ ;
- (e)  $T$  é simétrico se e somente se a matriz  $[T]_B$  é simétrica.

**1Q14.** Sejam  $E = [\sin x, \cos x, e^x]$  e  $T : E \rightarrow E$  o operador linear definido por  $T(f) = f''$ , para toda  $f \in E$ . A matriz que representa  $T$  relativamente à base  $B = (\sin x, \cos x, e^x)$  é:

- (a)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1Q15.** Considere a quádrlica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2x = 1,$$

relativamente a um sistema de coordenadas ortogonal. Uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a)  $u^2 + v^2 = 1$ ;
- (b)  $u^2 + 2v^2 = 1$ ;
- (c)  $u^2 + 2v^2 = 0$ ;
- (d)  $u^2 + 2v^2 = 2$ ;
- (e)  $u^2 + 2v^2 + w^2 = 1$ .

**1Q16.** Sejam  $U$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ ,  $B$  uma base de  $U$ ,  $T : U \rightarrow U$  um operador linear e  $A = [T]_B$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**:

- (a) se uma das colunas de  $A$  é nula então  $\dim(\text{Ker}(T)) \geq 1$ ;
- (b) se  $A$  tem exatamente duas colunas nulas, pode-se concluir que  $\lambda = 0$  é valor próprio de  $T$  com multiplicidade algébrica igual a 2;
- (c) se  $n$  é ímpar então  $T$  possui vetores próprios;
- (d) se  $T$  é diagonalizável e bijetor então  $T^{-1}$  é diagonalizável;
- (e) se as colunas de  $A$  são linearmente dependentes então  $\lambda = 0$  é valor próprio de  $T$ .

**1Q17.** Sejam  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $B = (e_1, e_2, e_3)$  uma base de  $V$  e assumamos que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **falsa**:

- (a) se  $a = b$  e  $c \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (b) se  $a \neq b$  e  $c = 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (c) se  $a = b$  e  $d \neq 0$  então  $T$  não é diagonalizável;
- (d) se  $a \neq b$ ,  $c = 0$  e  $d \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (e) se  $a = b$ ,  $c = 0$  e  $d \neq 0$  então  $T$  não é diagonalizável.

**1Q18.** Sejam  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $S$  um subespaço de  $E$  e  $u \in E$ . Sabendo que  $u = 3v + 5w$  com  $v \in S$ ,  $w \in S^\perp$ , podemos concluir que o vetor de  $S$  mais próximo de  $u$  é:

- (a)  $5w$ ;
- (b)  $\text{proj}_w u$ ;
- (c)  $\text{proj}_v u$ ;
- (d)  $w$ ;
- (e)  $-5w$ .

**1Q19.** Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear tal que  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^2$ . Assuma que  $T(1, 0) = (a, b)$  e  $T(0, 1) = (b, a)$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $ab = 0$ ;
- (II)  $a^2 + b^2 = 1$ ;
- (III)  $a > 0$  e  $b > 0$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**1Q20.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por:

$$T(p) = (p(0), p(1)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa **falsa**:

- (a)  $(T(-t), T(1 + t^2))$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ ;
- (b)  $(t - t^2, 2t - t^2 - t^3)$  é uma base de  $\text{Ker}(T)$ ;
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (d)  $T$  não é linear;
- (e)  $(t - 1, t^2 - t)$  não é uma base de  $\text{Ker}(T)$ .