Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \dots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \dots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \dots, u_n]$. O operador identidade de V será denotado por I.

Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S, se existir, será denotada por $\operatorname{proj}_S u$.

Se λ é um autovalor de um operador linear, então o auto-espaço associado a λ será denotado por $V(\lambda)$.

Q1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Assinale a alternativa correta.

(a) Se $a > 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

(b) Se $a < -1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(c) Se $a = 0$, então A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(d) Se $a = 1$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(e) Se $0 < a < 1$, então A não é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 1$ e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Suponha que exista $v \in V$ tal que $v \neq 0_V$, $\operatorname{Im}(T) = [v]$ e $T(v) = 0_V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T^2 é o operador nulo.

(II) 0 é autovalor de T com multiplicidade geométrica $n - 1$.

(III) T é invertível.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(b) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(c) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(d) As afirmações (I), (II) e (III) são todas verdadeiras.

(e) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q3. Considere o subespaço $S = [(1,1,1),(1,-1,0)]$ de $\mathbb{R}^3$ e, com respeito ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(u) = \operatorname{proj}_S u$, para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Então, podemos afirmar que

(a) $\operatorname{Ker}(T) = [(1,0,-1)]$.
(b) $\operatorname{Im}(T) = [(1,1,-2)]$.
(c) $\operatorname{Ker}(T) = [(1,1,0)]$.
(d) $\operatorname{Im}(T) = [(1,1,1),(1,1,0)]$.
(e) $\operatorname{Ker}(T) = [(1,1,-2)]$.

Q4. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então podemos afirmar que

(a) $\operatorname{Ker}(T) = [1 - t + t^2]$ e $\operatorname{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right]$.

(b) $\operatorname{Ker}(T) = [2 + 2t + 2t^2]$ e $\operatorname{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]$.

(c) $\operatorname{Ker}(T) = [2 - 2t - 2t^2]$ e $\operatorname{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]$.

(d) $\operatorname{Ker}(T) = [3 - 3t - 3t^2]$ e $\operatorname{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]$.

(e) $\operatorname{Ker}(T) = [3 + 3t - 3t^2]$ e $\operatorname{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]$.

Q5. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Seja $f(t)$ o polinômio de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $g(t) = t^2$. Se $f(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $3(a + b)$ é igual a

(a) -7.
(b) 7.
(c) -5.
(d) 2.
(e) 5.

Q6. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores 4 e -2. Se uma quádrica possui equação $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 2 = 0$ relativamente a um sistema ortogonal de coordenadas, então uma equação reduzida para essa quádrica é

(a) $4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 1$.
(b) $4u^2 - 2v^2 = 2$.
(c) $2u^2 + 2v^2 - t^2 = 1$.
(d) $2u^2 - v^2 - t^2 = 1$.
(e) $4u^2 - 2v^2 - 2t^2 = 1$.

Q7. Se $X(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ é a solução real do sistema $X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X(t)$ que verifica $X(0) = (1, -1)$, então podemos afirmar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, a soma $x_1(t) + x_2(t)$ é igual a

(a) $e^t\big(\operatorname{sen}(2t) - \cos(2t)\big)$.
(b) $2e^t \cos(2t)$.
(c) $2e^t \operatorname{sen}(2t)$.
(d) $e^t\big(\operatorname{sen}(2t) + \cos(2t)\big)$.
(e) 0.

Q8. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico e não sobrejetor. Sabendo que $(1,-1,1)$ e $(1,1,0)$ são autovetores de T associados respectivamente aos autovalores 1 e 2, pode-se afirmar que $T(4,0,-1)$ é igual a

(a) $(3,3,1)$.
(b) $(4,0,2)$.
(c) $(5,3,4)$.
(d) $(3,1,1)$.
(e) $(5,3,1)$.

Q9. Considere as bases $B = \{(1,1),(0,1)\}$ e $C = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $T(1,2) = (1,2)$ e $T(-2,1) = (0,0)$. Então a matriz $[T]_{CB}$ é igual a

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
(c) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
(d) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
(e) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Q10. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que -1 é um dos seus autovalores e

$$\mathrm{Ker}(T) = \left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right].$$

Então o polinômio característico de T é igual a

(a) $t(t+1)^3$.
(b) $t(t-1)^3$.
(c) $(t+1)^2(t-1)(t-2)$.
(d) $t^3(t-1)$.
(e) $t^3(t+1)$.

Q11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Suponha que todas as raízes do polinômio característico $p_T(t)$ de T são reais e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ as raízes distintas de $p_T(t)$. Para cada $j = 1, \dots, k$, seja B_j uma base de $\mathrm{Ker}(T - \lambda_j I)$. Seja $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. Podemos afirmar que

(a) B é linearmente dependente, mas gera V.
(b) B é linearmente independente, mas pode não gerar V.
(c) B é uma base de V.
(d) B pode ser linearmente dependente e não gerar V.
(e) B gera V, mas pode ser linearmente dependente.

Q12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$ seja A. Sabendo que 2 e 4 são autovalores de T e que $V(2) = [(1,1)]$ e $V(4) = [(-1,1)]$, se uma cônica possui equação $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 4y = 4$ relativamente a um sistema ortogonal de coordenadas, então uma equação reduzida para essa cônica é

(a) $u^2 - 2v^2 = 4$.
(b) $u^2 + 2v^2 = 4$.
(c) $u^2 + 2v^2 = 2$.
(d) $2u^2 + 4v^2 = 1$.
(e) $u^2 + 2v^2 = 6$.

Q13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 1$ e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Suponha que exista $v \in V$ tal que $v \neq 0_V$, $\mathrm{Im}(T) = [v]$ e $T(v) = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a afirmação correta.

(a) Se $\alpha \neq 0$, então T^2 não é diagonalizável.
(b) O operador T não é diagonalizável qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) Se $\alpha \neq 0$, então T é invertível.
(d) Se $\alpha = 0$, então T é diagonalizável.
(e) Se $\alpha \neq 0$, então T é diagonalizável.

Q14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se todas as raízes do polinômio característico de T são reais e duas a duas distintas, então T é diagonalizável.

(II) É possível que exista um autovalor λ de T tal que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ seja maior do que a multiplicidade algébrica de λ.

(III) T é diagonalizável se, e somente se, $\dim(V) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, onde $n_j = \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \lambda_j I)\big)$, para todo $j = 1, \ldots, k$, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores distintos (dois a dois) de T.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(b) As afirmações (I), (II) e (III) são todas verdadeiras.

(c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q15. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Considere o operador linear $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $T_A(x) = Ax$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e o operador linear $S_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definido por $S_A(z) = Az$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se, e somente se, S_A é diagonalizável.

(b) Se A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

(c) A é simétrica se, e somente se, T_A é simétrico com relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

(d) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se, A é simétrica.

(e) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se, T_A é diagonalizável.

Q16. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o subespaço $S = [(1, a, 0, b), (0, 1, 1, b), (a, 1, 0, ab)]$ de $\mathbb{R}^4$. Podemos afirmar que $\dim(S^{\perp}) = 1$ se, e somente se,

(a) $a \neq -1$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

(b) $a \neq -1$ e $b \neq 0$.

(c) $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

(d) $a \neq -1$ ou $a \neq 1$.

(e) $a \neq -1$ e $a \neq 1$.