Introdução à Teoria dos Jogos

Prof. Alexandre Lymberopoulos

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

1. MOTIVAÇÃO

2. DEFINIÇÕES PRELIMINARES
   - Exemplos
   - Estratégia

3. ESTRATÉGIA
   - Estratégias Ótimas
   - Exercícios

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

História e Aplicações

- Objetivo: fornecer método racional de tomada de decisões em situações de competição direta.
- Exemplos de aplicações: economia, política, guerra etc.
- Primórdios da teoria remontam a 1926:
  John Von Neumann (1903-1957) e Emile Borel (1871-1956).
- 1944: publicação do livro “Theory of Games and Economic Behavior” por Von Neumann e Oscar Morgenstein.

História e Aplicações

- Objetivo: fornecer método racional de tomada de decisões em situações de competição direta.
- Exemplos de aplicações: economia, política, guerra etc.
- Primórdios da teoria remontam a 1926:

  John Von Neumann (1903-1957) e Emile Borel (1871-1956).
- 1944: publicação do livro "Theory of Games and Economic Behavior" por Von Neumann e Oscar Morgenstein.

História e Aplicações

- Objetivo: fornecer método racional de tomada de decisões em situações de competição direta.
- Exemplos de aplicações: economia, política, guerra etc.
- Primórdios da teoria remontam a 1926:
  John Von Neumann (1903-1957) e Emile Borel (1871-1956).
- 1944: publicação do livro “Theory of Games and Economic Behavior” por Von Neumann e Oscar Morgenstein.

História e Aplicações

- Objetivo: fornecer método racional de tomada de decisões em situações de competição direta.
- Exemplos de aplicações: economia, política, guerra etc.
- Primórdios da teoria remontam a 1926:

  John Von Neumann (1903-1957) e Emile Borel (1871-1956).
- 1944: publicação do livro “Theory of Games and Economic Behavior” por Von Neumann e Oscar Morgenstein.

História e Aplicações

- Objetivo: fornecer método racional de tomada de decisões em situações de competição direta.
- Exemplos de aplicações: economia, política, guerra etc.
- Primórdios da teoria remontam a 1926:

  John Von Neumann (1903-1957) e Emile Borel (1871-1956).
- 1944: publicação do livro “Theory of Games and Economic Behavior” por Von Neumann e Oscar Morgenstein.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos

- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack)
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack).
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack).
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais “indivíduos” chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack).
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack).
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Jogos

Definição

Um jogo é uma situação de competição entre um ou mais "indivíduos" chamados jogadores

- Cada jogador tenta ganhar o máximo para si mesmo.
- Temos essencialmente dois tipos de jogos
  1. Jogos de azar: não dependem da ação dos jogadores (roleta, caça-níqueis);
  2. Jogos de estratégia: as decisões tomadas pelos jogadores influenciam diretamente o resultado do jogo (pôquer, xadrez, blackjack).
- Trataremos apenas de jogos de estratégia com dois participantes, J_1 e J_2.
- J_1 tem m opções de jogada e J_2 tem n opções de jogada a cada rodada.

Matrizes de pagamentos

Definição

A matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, onde a_{ij} contém o valor recebido por J_1 quando ele realiza a i-ésima opção de jogada e J_2 realiza sua j-ésima opção de jogada é chamada matriz de pagamentos de J_1.

- Podemos definir analogamente a matriz de pagamentos de J_2.
- Trataremos de jogos de *soma constante*, ou seja, a soma de pagamentos para J_1 e J_2 é a mesma para todas opções de jogadas deles.
- Caso especial: jogos de soma zero, ou seja, o que um [illegible] ganha é exatamente o que o outro perde.
- Em jogos de soma constante basta [illegible] matrizes de pagamento.

Matrizes de pagamentos

Definição

A matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, onde a_{ij} contém o valor recebido por J_1 quando ele realiza a i-ésima opção de jogada e J_2 realiza sua j-ésima opção de jogada é chamada matriz de pagamentos de J_1.

- Podemos definir analogamente a matriz de pagamentos de J_2.
- Trataremos de jogos de *soma constante*, ou seja, a soma de pagamentos para J_1 e J_2 é a mesma para todas opções de jogadas deles.
- Caso especial: *jogos de soma zero*, ou seja, o que um jogador ganha é exatamente o que o outro perde.
- Em jogos de soma constante basta apenas estudar uma das matrizes de pagamento.

Matrizes de pagamentos

Definição

A matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, onde a_{ij} contém o valor recebido por J_1 quando ele realiza a i-ésima opção de jogada e J_2 realiza sua j-ésima opção de jogada é chamada matriz de pagamentos de J_1.

- Podemos definir analogamente a matriz de pagamentos de J_2.
- Trataremos de jogos de *soma constante*, ou seja, a soma de pagamentos para J_1 e J_2 é a mesma para todas opções de jogadas deles.
- Caso especial: *jogos de soma zero*, ou seja, o que um jogador ganha é exatamente o que o outro perde.
- Em jogos de soma constante basta apenas estudar uma das matrizes de pagamento.

Matrizes de pagamentos

Definição

A matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, onde a_{ij} contém o valor recebido por J_1 quando ele realiza a i-ésima opção de jogada e J_2 realiza sua j-ésima opção de jogada é chamada matriz de pagamentos de J_1.

- Podemos definir analogamente a matriz de pagamentos de J_2.
- Trataremos de jogos de *soma constante*, ou seja, a soma de pagamentos para J_1 e J_2 é a mesma para todas opções de jogadas deles.
- Caso especial: *jogos de soma zero*, ou seja, o que um jogador ganha é exatamente o que o outro perde.
- Em jogos de soma constante basta apenas estudar uma das matrizes de pagamento.

Matrizes de pagamentos

Definição

A matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, onde a_{ij} contém o valor recebido por J_1 quando ele realiza a i-ésima opção de jogada e J_2 realiza sua j-ésima opção de jogada é chamada matriz de pagamentos de J_1.

- Podemos definir analogamente a matriz de pagamentos de J_2.
- Trataremos de jogos de *soma constante*, ou seja, a soma de pagamentos para J_1 e J_2 é a mesma para todas opções de jogadas deles.
- Caso especial: *jogos de soma zero*, ou seja, o que um jogador ganha é exatamente o que o outro perde.
- Em jogos de soma constante basta apenas estudar uma das matrizes de pagamento.

Cara ou coroa

- Cada um dos jogadores fica com uma moeda na mão.
- Cada jogador mostra uma face de sua moeda.
- Se ambos mostram a mesma face então J_1 ganha R$ 1,00 de J_2, caso contrário J_2 ganha R$ 1,00 de J_1.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cara ou coroa

- Cada um dos jogadores fica com uma moeda na mão.
- Cada jogador mostra uma face de sua moeda.
- Se ambos mostram a mesma face então J_1 ganha R$ 1,00 de J_2, caso contrário J_2 ganha R$ 1,00 de J_1.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cara ou coroa

- Cada um dos jogadores fica com uma moeda na mão.
- Cada jogador mostra uma face de sua moeda.
- Se ambos mostram a mesma face então J_1 ganha R$ 1,00 de J_2, caso contrário J_2 ganha R$ 1,00 de J_1.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cara ou coroa

- Cada um dos jogadores fica com uma moeda na mão.
- Cada jogador mostra uma face de sua moeda.
- Se ambos mostram a mesma face então J_1 ganha R$ 1,00 de J_2, caso contrário J_2 ganha R$ 1,00 de J_1.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Marketing de um produto

- Dois fornecedores de pneus disputam um total de 100000 clientes.
- Eles podem anunciar seu produto na TV ou em jornais.
- Se ambas anunciarem na TV então J_1 terá 40000 clientes.
- Se ambas anunciarem em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- Se J_1 anunciar em jornais e J_2 na TV então J_1 fica com 60000 clientes.
- Se J_1 anunciar na TV e J_2 em jornais então J_1 fica com 50000 clientes.
- A matriz de pagamentos é

$$A = \begin{bmatrix} 40000 & 50000 \\ 60000 & 50000 \end{bmatrix}.$$

Procurando o Melhor I

- Consideremos um jogo de soma constante entre dois jogadores com matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$.
- Se J_1 escolhe sua i-ésima jogada então ele ganha no mínimo o menor valor da linha i de A, independente do J_2 faça.
- O melhor para J_1 é escolher uma linha cujo menor valor seja o máximo possível.
- Para J_2 é o contrário, ele quer a coluna cujo maior valor seja o mínimo possível.

Definição

Se a matriz de pagamentos de um jogo contém um elemento a_{rs} que é o mínimo da linha r e o máximo da coluna s, então (r, s) é o ponto de sela do jogo e a_{rs} é o valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que o jogo é imparcial.

Procurando o Melhor I

- Consideremos um jogo de soma constante entre dois jogadores com matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$.
- Se J_1 escolhe sua i-ésima jogada então ele ganha no mínimo o menor valor da linha i de A, independente do J_2 faça.
- O melhor para J_1 é escolher uma linha cujo menor valor seja o máximo possível.
- Para J_2 é o contrário, ele quer a coluna cujo maior valor seja o mínimo possível.

Definição

Se a matriz de pagamentos de um jogo contém um elemento a_{rs} que é o mínimo da linha r e o máximo da coluna s, então (r, s) é o ponto de sela do jogo e a_{rs} é o valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que o jogo é imparcial.

Procurando o Melhor I

- Consideremos um jogo de soma constante entre dois jogadores com matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$.
- Se J_1 escolhe sua i-ésima jogada então ele ganha no mínimo o menor valor da linha i de A, independente do J_2 faça.
- O melhor para J_1 é escolher uma linha cujo menor valor seja o máximo possível.
- Para J_2 é o contrário, ele quer a coluna cujo maior valor seja o mínimo possível.

Definição

Se a matriz de pagamentos de um jogo contém um elemento a_{rs} que é o mínimo da linha r e o máximo da coluna s, então (r, s) é o ponto de sela do jogo e a_{rs} é o valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que o jogo é imparcial.

Procurando o Melhor I

- Consideremos um jogo de soma constante entre dois jogadores com matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$.
- Se J_1 escolhe sua i-ésima jogada então ele ganha no mínimo o menor valor da linha i de A, independente do J_2 faça.
- O melhor para J_1 é escolher uma linha cujo menor valor seja o máximo possível.
- Para J_2 é o contrário, ele quer a coluna cujo maior valor seja o mínimo possível.

Definição

Se a matriz de pagamentos de um jogo contém um elemento a_{rs} que é o mínimo da linha r e o máximo da coluna s, então (r, s) é o ponto de sela do jogo e a_{rs} é o valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que o jogo é imparcial.

Procurando o Melhor I

- Consideremos um jogo de soma constante entre dois jogadores com matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$.
- Se J_1 escolhe sua i-ésima jogada então ele ganha no mínimo o menor valor da linha i de A, independente do J_2 faça.
- O melhor para J_1 é escolher uma linha cujo menor valor seja o máximo possível.
- Para J_2 é o contrário, ele quer a coluna cujo maior valor seja o mínimo possível.

Definição

Se a matriz de pagamentos de um jogo contém um elemento a_{rs} que é o mínimo da linha r e o máximo da coluna s, então (r, s) é o ponto de sela do jogo e a_{rs} é o valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que o jogo é imparcial.

Procurando o Melhor II

Definição

Um jogo é estritamente determinado se sua matriz de pagamentos possui um ponto de sela.

- Se a_{rs} é um ponto de sela então quando J_1 escolhe sua r-ésima jogada ele ganha ao menos a_{rs} e J_2 tem a certeza de não perder mais do que a_{rs} ao usar sua s-ésima jogada, o que é o melhor que cada um pode fazer.

Procurando o Melhor II

Definição

Um jogo é estritamente determinado se sua matriz de pagamentos possui um ponto de sela.

- Se a_{rs} é um ponto de sela então quando J_1 escolhe sua r-ésima jogada ele ganha ao menos a_{rs} e J_2 tem a certeza de não perder mais do que a_{rs} ao usar sua s-ésima jogada, o que é o melhor que cada um pode fazer.

Procurando o Melhor III

- Exemplo: a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

tem ponto de sela?

- Escreva o mínimo de cada linha ao lado dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Se houver uma posição da matriz cujo elemento está nos dois vetores adicionados ao mesmo tempo, então esta posição é um ponto de sela e seu valor é o valor do jogo.
- No caso $(2, 3)$ é ponto de sela e 2 é o valor do jogo.
- O melhor que J_1 faz é escolher sua segunda jogada, pois com isso ele ganha, no mínimo, 2. Para J_2 é melhor usar sua terceira jogada, onde ele perde, no máximo, 2.
- No jogo de cara ou coroa proposto não há ponto de sela.

Procurando o Melhor III

- Exemplo: a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
tem ponto de sela?
- Escreva o mínimo de cada linha ao lado dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Se houver uma posição da matriz cujo elemento está nos dois vetores adicionados ao mesmo tempo, então esta posição é um ponto de sela e seu valor é o valor do jogo.
- No caso $(2, 3)$ é ponto de sela e 2 é o valor do jogo.
- O melhor que J_1 faz é escolher sua segunda jogada, pois com isso ele ganha, no mínimo, 2. Para J_2 é melhor usar sua terceira jogada, onde ele perde, no máximo, 2.
- No jogo de cara ou coroa proposto não há ponto de sela.

Procurando o Melhor III

- Exemplo: a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

  tem ponto de sela?
- Escreva o mínimo de cada linha ao lado dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Se houver uma posição da matriz cujo elemento está nos dois vetores adicionados ao mesmo tempo, então esta posição é um ponto de sela e seu valor é o valor do jogo.
- No caso $(2, 3)$ é ponto de sela e 2 é o valor do jogo.
- O melhor que J_1 faz é escolher sua segunda jogada, pois com isso ele ganha, no mínimo, 2. Para J_2 é melhor usar sua terceira jogada, onde ele perde, no máximo, 2.
- No jogo de cara ou coroa proposto não há ponto de sela.

Procurando o Melhor III

- Exemplo: a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
tem ponto de sela?
- Escreva o mínimo de cada linha ao lado dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Se houver uma posição da matriz cujo elemento está nos dois vetores adicionados ao mesmo tempo, então esta posição é um ponto de sela e seu valor é o valor do jogo.
- No caso $(2, 3)$ é ponto de sela e 2 é o valor do jogo.
- O melhor que J_1 faz é escolher sua segunda jogada, pois com isso ele ganha, no mínimo, 2. Para J_2 é melhor usar sua terceira jogada, onde ele perde, no máximo, 2.
- No jogo de cara ou coroa proposto não há ponto de sela.

Procurando o Melhor III

- Exemplo: a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
tem ponto de sela?
- Escreva o mínimo de cada linha ao lado dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Se houver uma posição da matriz cujo elemento está nos dois vetores adicionados ao mesmo tempo, então esta posição é um ponto de sela e seu valor é o valor do jogo.
- No caso $(2, 3)$ é ponto de sela e 2 é o valor do jogo.
- O melhor que J_1 faz é escolher sua segunda jogada, pois com isso ele ganha, no mínimo, 2. Para J_2 é melhor usar sua terceira jogada, onde ele perde, no máximo, 2.
- No jogo de cara ou coroa proposto não há ponto de sela.

Jogos Estritamente Não Determinados I

- Consideraremos que o jogo é repetido muitas vezes entre os jogadores.
- Isto permite introduzir uma análise estatística e produzir frequências para cada jogada disponível.

Definição

Sejam A uma matriz $m \times n$ de pagamentos de um jogo, $p_i, 1 \leq i \leq m$ a probabilidade de J_1 escolher a i-ésima jogada (ou seja, a i-ésima linha de A) e $q_j, 1 \leq j \leq n$ a probabilidade de J_2 escolher a j-ésima jogada (ou seja, a j-ésima coluna de A). Os vetores

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T$$

são chamados estratégias para os jogadores J_1 e J_2 respectivamente.

Jogos Estritamente Não Determinados I

- Consideraremos que o jogo é repetido muitas vezes entre os jogadores.
- Isto permite introduzir uma análise estatística e produzir frequências para cada jogada disponível.

Definição

Sejam A uma matriz $m \times n$ de pagamentos de um jogo, $p_i, 1 \leq i \leq m$ a probabilidade de J_1 escolher a i-ésima jogada (ou seja, a i-ésima linha de A) e $q_j, 1 \leq j \leq n$ a probabilidade de J_2 escolher a j-ésima jogada (ou seja, a j-ésima coluna de A). Os vetores

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T$$

são chamados estratégias para os jogadores J_1 e J_2 respectivamente.

Jogos Estritamente Não Determinados I

- Consideraremos que o jogo é repetido muitas vezes entre os jogadores.
- Isto permite introduzir uma análise estatística e produzir frequências para cada jogada disponível.

Definição

Sejam A uma matriz $m \times n$ de pagamentos de um jogo, $p_i, 1 \leq i \leq m$ a probabilidade de J_1 escolher a i-ésima jogada (ou seja, a i-ésima linha de A) e $q_j, 1 \leq j \leq n$ a probabilidade de J_2 escolher a j-ésima jogada (ou seja, a j-ésima coluna de A). Os vetores

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T$$

são chamados estratégias para os jogadores J_1 e J_2 respectivamente.

Jogos Estritamente Não Determinados II

- Observamos da construção dos vetores p e q que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{1}$$

Definição

Uma estratégia é chamada pura todas as componentes são nulas, exceto uma, que deve valer 1, e é chamada mista em caso contrário.

- As estratégias para o jogo estritamente determinado do exemplo 10 são puras: $p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Jogos Estritamente Não Determinados II

- Observamos da construção dos vetores p e q que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{1}$$

Definição

Uma estratégia é chamada pura todas as componentes são nulas, exceto uma, que deve valer 1, e é chamada mista em caso contrário.

- As estratégias para o jogo estritamente determinado do exemplo 10 são puras: $p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Jogos Estritamente Não Determinados II

- Observamos da construção dos vetores p e q que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{1}$$

Definição

Uma estratégia é chamada pura todas as componentes são nulas, exceto uma, que deve valer 1, e é chamada mista em caso contrário.

- As estratégias para o jogo estritamente determinado do exemplo 10 são puras: $p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos
  1. $p = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p, q) = \frac{1}{2}$.
  2. $p = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p, q) = -\frac{1}{6}$.

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p, q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \qquad (2)$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos
  1. $p = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p, q) = \frac{1}{2}$.
  2. $p = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p, q) = -\frac{1}{6}$.

Jogos 2×2

- Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de pagamentos de algum jogo.
- Sejam $p \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ as estratégias dos jogadores J_1 e J_2, respectivamente.
- O ganho esperado por J_1 é

$$E(p,q) = pAq = p_1 q_1 a + p_1 q_2 b + p_2 q_1 ac + p_2 q_2 d \tag{2}$$

- A expressão matricial acima vale para jogos com matrizes de pagamento de qualquer tamanho.
- Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ temos
  1. $p = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p,q) = \frac{1}{2}$.
  2. $p = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow E(p,q) = -\frac{1}{6}$.

Estratégias Ótimas I

Definição

Uma estratégia para J_1 é ótima se ela garante o maior ganho possível para J_1.
Uma estratégia para J_2 é ótima se ela garante o menor ganho possível para J_1.
Se p e q são estratégias ótimas para J_1 e J_2 respectivamente, o número $v = E(p, q)$ é chamado valor do jogo.
Se o valor de um jogo de soma zero é zero, dizemos que tal jogo é imparcial.

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 I

- Um jogo 2×2 não é estritamente determinado se e somente $a + d - b - c \neq 0$.
- Se J_2 escolhe a primeira coluna então J_1 ganha $p_1 a + p_2 c$.
- Se J_2 escolhe a segunda coluna então J_1 ganha $p_1 b + p_2 d$.
- Fazendo $v = \min\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c &\geq v \\ p_1 b + p_2 d &\geq v \end{aligned}$$

- J_1 quer o maior v possível, ou seja, encontrar o maior v tal que

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c - v &\geq 0 \\ p_1 b + p_2 d - v &\geq 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 I

- Um jogo 2×2 não é estritamente determinado se e somente $a + d - b - c \neq 0$.
- Se J_2 escolhe a primeira coluna então J_1 ganha $p_1 a + p_2 c$.
- Se J_2 escolhe a segunda coluna então J_1 ganha $p_1 b + p_2 d$.
- Fazendo $v = \min\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c &\geq v \\ p_1 b + p_2 d &\geq v \end{aligned}$$

- J_1 quer o maior v possível, ou seja, encontrar o maior v tal que

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c - v &\geq 0 \\ p_1 b + p_2 d - v &\geq 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 I

- Um jogo 2×2 não é estritamente determinado se e somente $a + d - b - c \neq 0$.
- Se J_2 escolhe a primeira coluna então J_1 ganha $p_1 a + p_2 c$.
- Se J_2 escolhe a segunda coluna então J_1 ganha $p_1 b + p_2 d$.
- Fazendo $v = \min\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c &\geq v \\ p_1 b + p_2 d &\geq v \end{aligned}$$

- J_1 quer o maior v possível, ou seja, encontrar o maior v tal que

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c - v &\geq 0 \\ p_1 b + p_2 d - v &\geq 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 I

- Um jogo 2×2 não é estritamente determinado se e somente $a + d - b - c \neq 0$.
- Se J_2 escolhe a primeira coluna então J_1 ganha $p_1 a + p_2 c$.
- Se J_2 escolhe a segunda coluna então J_1 ganha $p_1 b + p_2 d$.
- Fazendo $v = \min\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c &\geq v \\ p_1 b + p_2 d &\geq v \end{aligned}$$

- J_1 quer o maior v possível, ou seja, encontrar o maior v tal que

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c - v &\geq 0 \\ p_1 b + p_2 d - v &\geq 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 I

- Um jogo 2×2 não é estritamente determinado se e somente $a + d - b - c \neq 0$.
- Se J_2 escolhe a primeira coluna então J_1 ganha $p_1 a + p_2 c$.
- Se J_2 escolhe a segunda coluna então J_1 ganha $p_1 b + p_2 d$.
- Fazendo $v = \min\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c &\geq v \\ p_1 b + p_2 d &\geq v \end{aligned}$$

- J_1 quer o maior v possível, ou seja, encontrar o maior v tal que

$$\begin{aligned} p_1 a + p_2 c - v &\geq 0 \\ p_1 b + p_2 d - v &\geq 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 II

- O sistema acima é um problema de programação linear, que será estudado mais adiante e pode ser resolvido com o método simplex.
- Pode-se mostrar que a solução para o problema nesse caso é

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{d-c}{a+d-b-c} \\
p_2 &= \frac{a-b}{a+d-b-c} \\
v &= \frac{ad-bc}{a+d-b-c}
\end{aligned}
$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_1 II

- O sistema acima é um problema de programação linear, que será estudado mais adiante e pode ser resolvido com o método simplex.
- Pode-se mostrar que a solução para o problema nesse caso é

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{d-c}{a+d-b-c} \\ p_2 &= \frac{a-b}{a+d-b-c} \\ v &= \frac{ad-bc}{a+d-b-c} \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 I

- De modo análogo ao feito para o jogador J_1 mostramos que
  1. Se J_1 escolhe a primeira linha então J_2 ganha $q_1a + q_2b$.
  2. Se J_1 escolhe a segunda linha então J_2 ganha $q_1c + q_2d$.
- Fazendo $v' = \max\{p_1a + p_2c, p_1b + p_2d\}$ temos

$$\begin{aligned} q_1a + q_2b &\leq v' \\ q_1c + q_2d &\leq v' \end{aligned}$$

- J_2 quer o menor v' possível, ou seja, encontrar o menor v' tal que

$$\begin{aligned} q_1a + q_2b - v' &\leq 0 \\ q_1c + q_2d - v' &\leq 0 \\ q_1 + q_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 I

- De modo análogo ao feito para o jogador J_1 mostramos que
  1. Se J_1 escolhe a primeira linha então J_2 ganha $q_1 a + q_2 b$.
  2. Se J_1 escolhe a segunda linha então J_2 ganha $q_1 c + q_2 d$.
- Fazendo $v' = \max\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b &\leq v' \\ q_1 c + q_2 d &\leq v' \end{aligned}$$

- J_2 quer o menor v' possível, ou seja, encontrar o menor v' tal que

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b - v' &\leq 0 \\ q_1 c + q_2 d - v' &\leq 0 \\ q_1 + q_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 I

- De modo análogo ao feito para o jogador J_1 mostramos que
  1. Se J_1 escolhe a primeira linha então J_2 ganha $q_1 a + q_2 b$.
  2. Se J_1 escolhe a segunda linha então J_2 ganha $q_1 c + q_2 d$.
- Fazendo $v' = \max\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b &\leq v' \\ q_1 c + q_2 d &\leq v' \end{aligned}$$

- J_2 quer o menor v' possível, ou seja, encontrar o menor v' tal que

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b - v' &\leq 0 \\ q_1 c + q_2 d - v' &\leq 0 \\ q_1 + q_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 I

- De modo análogo ao feito para o jogador J_1 mostramos que
  1. Se J_1 escolhe a primeira linha então J_2 ganha $q_1 a + q_2 b$.
  2. Se J_1 escolhe a segunda linha então J_2 ganha $q_1 c + q_2 d$.
- Fazendo $v' = \max\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b &\leq v' \\ q_1 c + q_2 d &\leq v' \end{aligned}$$

- J_2 quer o menor v' possível, ou seja, encontrar o menor v' tal que

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b - v' &\leq 0 \\ q_1 c + q_2 d - v' &\leq 0 \\ q_1 + q_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 I

- De modo análogo ao feito para o jogador J_1 mostramos que
  1. Se J_1 escolhe a primeira linha então J_2 ganha $q_1 a + q_2 b$.
  2. Se J_1 escolhe a segunda linha então J_2 ganha $q_1 c + q_2 d$.
- Fazendo $v' = \max\{p_1 a + p_2 c, p_1 b + p_2 d\}$ temos

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b &\leq v' \\ q_1 c + q_2 d &\leq v' \end{aligned}$$

- J_2 quer o menor v' possível, ou seja, encontrar o menor v' tal que

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 b - v' &\leq 0 \\ q_1 c + q_2 d - v' &\leq 0 \\ q_1 + q_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' &\geq 0. \end{aligned}$$

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 II

- O sistema acima também é um problema de programação linear.
- Pode-se mostrar que a solução para o problema nesse caso é

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{d-b}{a+d-b-c} \\
q_2 &= \frac{a-c}{a+d-b-c} \\
v' &= \frac{ad-bc}{a+d-b-c}
\end{aligned}
$$

- Observamos que $v = v'$, ou seja a estratégia ótima para J_1 e J_2 dá o mesmo valor esperado para ambos os jogadores.

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 II

- O sistema acima também é um problema de programação linear.
- Pode-se mostrar que a solução para o problema nesse caso é

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{d-b}{a+d-b-c} \\ q_2 &= \frac{a-c}{a+d-b-c} \\ v' &= \frac{ad-bc}{a+d-b-c} \end{aligned}$$

- Observamos que $v = v'$, ou seja a estratégia ótima para J_1 e J_2 dá o mesmo valor esperado para ambos os jogadores.

Estratégias Ótimas II - Jogador J_2 II

- O sistema acima também é um problema de programação linear.
- Pode-se mostrar que a solução para o problema nesse caso é

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{d-b}{a+d-b-c} \\
q_2 &= \frac{a-c}{a+d-b-c} \\
v' &= \frac{ad-bc}{a+d-b-c}
\end{aligned}
$$

- Observamos que $v = v'$, ou seja a estratégia ótima para J_1 e J_2 dá o mesmo valor esperado para ambos os jogadores.

Mãos à Obra

1. Determine estratégias ótimas para o jogo de cara ou coroa.
2. Determine estratégias ótimas para o jogo cuja matriz de pagamentos é $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Determine também o valor do jogo e se ele é imparcial, apontando quem é o jogador favorecido em caso negativo.

[1] Kolman, B. and Hill, D., *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*, 8a. ed., Rio de Janeiro, LTC, 2006.

[2] Owen, G., *Game Theory*, 3rd. ed., Orlando, Academic Press, 1995.

[3] Straffin, P. D., *Game theory and Strategy*, Washington, D.C., New Mathematical Library, 36, 1996.

[4] Thie, P. R., *an Introduction to Linear Programming and Game Theory*, 2nd. ed., New York, John wiley & Sons, Inc., 1988.