

TEORIA MODERNA DE PORTFOLIOS UM PONTO DE VISTA MATEMÁTICO

Prof. Alexandre Lymberopoulos

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

1 INTRODUÇÃO

2 RISCO E RETORNO

- Um pouco de Estatística

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

4 INVESTIMENTOS DE RISCO ZERO

5 ESTATÍSTICA E ÁLGEBRA LINEAR

OBJETIVOS

- A idéia é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfolio.

OBJETIVOS

- A idéia é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfolio.
- E também como precificar um investimento de alto risco.

OBJETIVOS

- A idéia é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfólio.
- E também como precificar um investimento de alto risco.
- Este modelo trata o retorno de um investimento como uma variável aleatória e um portfólio como uma combinação linear convexa de um número dado de investimentos e é, então, uma variável aleatória.

OBJETIVOS

- A idéia é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfolio.
- E também como precificar um investimento de alto risco.
- Este modelo trata o retorno de um investimento como uma variável aleatória e um portfolio como uma combinação linear convexa de um número dado de investimentos e é, então, uma variável aleatória.
- Portanto possui esperança e variância.

OBJETIVOS

- A idéia é modelar como um investidor racional diversificaria seus investimentos para otimizar seu portfólio.
- E também como precificar um investimento de alto risco.
- Este modelo trata o retorno de um investimento como uma variável aleatória e um portfólio como uma combinação linear convexa de um número dado de investimentos e é, então, uma variável aleatória.
- Portanto possui esperança e variância.
- O risco, neste modelo, é o desvio padrão desta variável aleatória.

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).
- Um investidor racional não investe num portfolio se existir um segundo portfolio com um perfil de risco-retorno mais favorável às suas expectativas.

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).
- Um investidor racional não investe num portfolio se existir um segundo portfolio com um perfil de risco-retorno mais favorável às suas expectativas.
- O modelo usa um dado histórico, a volatilidade, como uma medida para o risco.

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).
- Um investidor racional não investe num portfolio se existir um segundo portfolio com um perfil de risco-retorno mais favorável às suas expectativas.
- O modelo usa um dado histórico, a volatilidade, como uma medida para o risco.
- O modelo assume que o investidor é indiferente a outras informações (isso nem sempre é verdade).

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).
- Um investidor racional não investe num portfolio se existir um segundo portfolio com um perfil de risco-retorno mais favorável às suas expectativas.
- O modelo usa um dado histórico, a volatilidade, como uma medida para o risco.
- O modelo assume que o investidor é indiferente a outras informações (isso nem sempre é verdade).
- O retorno do portfolio é a combinação linear convexa dos retornos de cada investimento do portfolio.

O PERFIL DO INVESTIDOR

- O modelo assume que o investidor é averso à riscos.
- Mas ele também quer um bom retorno, e, para tanto, precisa assumir algum risco (que gere uma expectativa alta de um bom retorno, obviamente).
- Um investidor racional não investe num portfolio se existir um segundo portfolio com um perfil de risco-retorno mais favorável às suas expectativas.
- O modelo usa um dado histórico, a volatilidade, como uma medida para o risco.
- O modelo assume que o investidor é indiferente a outras informações (isso nem sempre é verdade).
- O retorno do portfolio é a combinação linear convexa dos retornos de cada investimento do portfolio.
- A volatilidade do portfolio é uma função que depende da correlação dos investimentos nele e é não linear nos “pesos”.

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;
 - Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *eventos*;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;
 - Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *eventos*;
 - P é uma medida (de probabilidade) em $(\Omega, \mathcal{F})$, ou seja, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma função satisfazendo

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;
 - Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *eventos*;
 - P é uma medida (de probabilidade) em $(\Omega, \mathcal{F})$, ou seja, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma função satisfazendo
 - 1 $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;
 - Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *eventos*;
 - P é uma medida (de probabilidade) em $(\Omega, \mathcal{F})$, ou seja, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma função satisfazendo
 - 1 $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;
 - 2 Se $E_1, E_2, \dots$ são eventos disjuntos ($E_i \cap E_j = \emptyset$) então $P(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Espaço de Probabilidades: é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde
 - Ω é um conjunto qualquer, chamado espaço amostral. Para nossos propósitos podemos assumir $\Omega = \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de Ω , ou seja, uma coleção de subconjuntos de Ω satisfazendo
 - 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - 2 Se $E \subset \Omega$ então $E \in \mathcal{F} \iff E^c \in \mathcal{F}$;
 - 3 $\mathcal{F}$ é fechado por união enumerável de elementos em $\mathcal{F}$;
 - Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *eventos*;
 - P é uma medida (de probabilidade) em $(\Omega, \mathcal{F})$, ou seja, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma função satisfazendo
 - 1 $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;
 - 2 Se $E_1, E_2, \dots$ são eventos disjuntos ($E_i \cap E_j = \emptyset$) então $P(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$
- Variável aleatória: se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade então uma *variável aleatória* é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo elemento de $\mathcal{F}$.

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Esperança: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ então seu *valor esperado* ou *esperança* é

$$\mu_X = E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Esperança: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ então seu *valor esperado* ou *esperança* é

$$\mu_X = E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

- Nem sempre existe μ_X (ver distribuição de Cauchy).

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Esperança: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ então seu *valor esperado* ou *esperança* é

$$\mu_X = E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

- Nem sempre existe μ_X (ver distribuição de Cauchy).
- Se X é discreta com eventos x_i , $1 \leq i \leq n$ e probabilidade $p(x_i)$ então

$$E(X) = \sum x_i p(x_i).$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Esperança: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ então seu *valor esperado* ou *esperança* é

$$\mu_X = E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

- Nem sempre existe μ_X (ver distribuição de Cauchy).
- Se X é discreta com eventos x_i , $1 \leq i \leq n$ e probabilidade $p(x_i)$ então

$$E(X) = \sum x_i p(x_i).$$

- Se X é contínua com densidade de probabilidade $f(x)$ então

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Variância: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperança μ então sua *variância* é

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2].$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Variância: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperança μ então sua *variância* é

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2].$$

- Nem sempre existe $\text{Var}(X)$ (ver distribuição de Cauchy).

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Variância: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperança μ então sua *variância* é

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2].$$

- Nem sempre existe $\text{Var}(X)$ (ver distribuição de Cauchy).
- Se X é variável aleatória discreta com cada evento x_i , $1 \leq i \leq n$ tendo probabilidade $p(x_i)$ então

$$\text{Var}(X) = \sum p(x_i)(x_i - \mu)^2.$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Variância: se X é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperança μ então sua *variância* é

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2].$$

- Nem sempre existe $\text{Var}(X)$ (ver distribuição de Cauchy).
- Se X é variável aleatória discreta com cada evento x_i , $1 \leq i \leq n$ tendo probabilidade $p(x_i)$ então

$$\text{Var}(X) = \sum p(x_i)(x_i - \mu)^2.$$

- Se X é variável aleatória contínua com densidade de probabilidade $f(x)$ então

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Covariância: se X e Y são duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperanças μ e ν , respectivamente, então a *covariância* de X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu)(Y - \nu)].$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Covariância: se X e Y são duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperanças μ e ν , respectivamente, então a *covariância* de X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu)(Y - \nu)].$$

- Usando somente as definições vemos que

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu)(Y - \nu)] = E[XY - Y\mu - X\nu + \mu\nu] \\ &= E(XY) - \mu\nu\end{aligned}$$

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Covariância: se X e Y são duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperanças μ e ν , respectivamente, então a *covariância* de X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu)(Y - \nu)].$$

- Usando somente as definições vemos que

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu)(Y - \nu)] = E[XY - Y\mu - X\nu + \mu\nu] \\ &= E(XY) - \mu\nu\end{aligned}$$

- $\text{Cov}(X, Y)$ mede o quanto uma variação de X influencia a variação de Y .

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Covariância: se X e Y são duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperanças μ e ν , respectivamente, então a *covariância* de X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu)(Y - \nu)].$$

- Usando somente as definições vemos que

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu)(Y - \nu)] = E[XY - Y\mu - X\nu + \mu\nu] \\ &= E(XY) - \mu\nu\end{aligned}$$

- $\text{Cov}(X, Y)$ mede o quanto uma variação de X influencia a variação de Y .
- Se X e Y são independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$ e portanto $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Além disso, $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.

“RECORDAÇÃO” DE ALGUNS CONCEITOS

- Covariância: se X e Y são duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com esperanças μ e ν , respectivamente, então a *covariância* de X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu)(Y - \nu)].$$

- Usando somente as definições vemos que

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu)(Y - \nu)] = E[XY - Y\mu - X\nu + \mu\nu] \\ &= E(XY) - \mu\nu\end{aligned}$$

- $\text{Cov}(X, Y)$ mede o quanto uma variação de X influencia a variação de Y .
- Se X e Y são independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$ e portanto $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Além disso, $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
- A correlação de X e Y é dada por $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$.

A MATEMÁTICA

- Sejam $R_1, \dots, R_n$ os retornos de n investimentos disponíveis no mercado e $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ os percentuais do capital total que se deseja investir em cada um dos investimentos.

A MATEMÁTICA

- Sejam $R_1, \dots, R_n$ os retornos de n investimentos disponíveis no mercado e $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ os percentuais do capital total que se deseja investir em cada um dos investimentos.
- O retorno de um tal investimento é

$$R = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (1)$$

A MATEMÁTICA

- Sejam $R_1, \dots, R_n$ os retornos de n investimentos disponíveis no mercado e $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ os percentuais do capital total que se deseja investir em cada um dos investimentos.
- O retorno de um tal investimento é

$$R = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (1)$$

- R é variável aleatória pois, por hipótese, cada R_i o é, e

$$\mu_R := E(R) = E\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (2)$$

$$\sigma_R^2 := \text{Var}(R) = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i,j=1}^n w^T C w, \quad (3)$$

onde C é a matriz de covariâncias de R_i e R_j .

A MATEMÁTICA

- O *risco* de R é $\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)}$.

A MATEMÁTICA

- O *risco* de R é $\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)}$.
- Os *vetores atingíveis* ou *viáveis* são aqueles tais que $\sum w_i = 1$ (os percentuais de investimento devem somar 100%).

A MATEMÁTICA

- O *risco* de R é $\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)}$.
- Os *vetores atingíveis* ou *viáveis* são aqueles tais que $\sum w_i = 1$ (os percentuais de investimento devem somar 100%).
- O problema então resume-se a encontrar um vetor de percentuais de investimentos, w , que minimize o risco σ_R para um dado retorno fixado $\mu_0 = \mu(w)$, ou seja, procuramos um vetor atingível w que minimize $\sigma(w)$ para um dado valor de $\mu(w)$.

A MATEMÁTICA

- O *risco* de R é $\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)}$.
- Os *vetores atingíveis* ou *viáveis* são aqueles tais que $\sum w_i = 1$ (os percentuais de investimento devem somar 100%).
- O problema então resume-se a encontrar um vetor de percentuais de investimentos, w , que minimize o risco σ_R para um dado retorno fixado $\mu_0 = \mu(w)$, ou seja, procuramos um vetor atingível w que minimize $\sigma(w)$ para um dado valor de $\mu(w)$.
- O espaço dos vetores atingíveis é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ e queremos encontrar um ponto desse hiperplano que minimiza a função quadrática $\sigma(w)$.

A MATEMÁTICA

- O *risco* de R é $\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)}$.
- Os *vetores atingíveis* ou *viáveis* são aqueles tais que $\sum w_i = 1$ (os percentuais de investimento devem somar 100%).
- O problema então resume-se a encontrar um vetor de percentuais de investimentos, w , que minimize o risco σ_R para um dado retorno fixado $\mu_0 = \mu(w)$, ou seja, procuramos um vetor atingível w que minimize $\sigma(w)$ para um dado valor de $\mu(w)$.
- O espaço dos vetores atingíveis é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ e queremos encontrar um ponto desse hiperplano que minimiza a função quadrática $\sigma(w)$.
- Da equação (3) vemos que $\sigma(w)$ pode ser pensada como o “comprimento” de w relativo ao produto interno dado pela matriz C na base canônica.

A MATEMÁTICA

- Este é um problema típico de multiplicadores de Lagrange, que é estudado em Cálculo II (MAT-2454).

A MATEMÁTICA

- Este é um problema típico de multiplicadores de Lagrange, que é estudado em Cálculo II (MAT-2454).
- O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} \nabla \sigma(\mathbf{w}) &= \lambda \nabla \mu(\mathbf{w}) \\ \mu(\mathbf{w}) = \sum w_i &= 1 \end{cases}, \quad (4)$$

onde σ e μ são funções de $\mathbb{R}^n$ a valores reais.

A MATEMÁTICA

- Este é um problema típico de multiplicadores de Lagrange, que é estudado em Cálculo II (MAT-2454).
- O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} \nabla \sigma(\mathbf{w}) &= \lambda \nabla \mu(\mathbf{w}) \\ \mu(\mathbf{w}) = \sum w_i &= 1 \end{cases}, \quad (4)$$

onde σ e μ são funções de $\mathbb{R}^n$ a valores reais.

TEOREMA

Se w é uma solução do sistema (4) então existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sigma(\mu) = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}. \quad (5)$$

A MATEMÁTICA

- A curva descrita pela equação (5) é chamada “Markowitz Bullet”

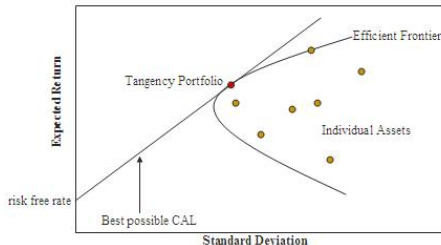


FIGURA : Markowitz Bullet

A MATEMÁTICA

- A curva descrita pela equação (5) é chamada “Markowitz Bullet”

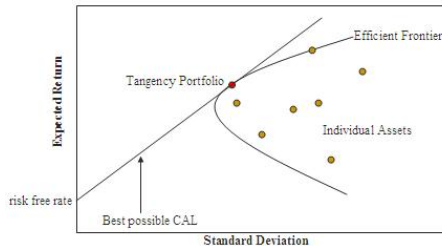


FIGURA : Markowitz Bullet

- Para cada retorno fixado μ_0 , o risco mínimo é dado por σ tal que (σ, μ_0) esteja sobre a curva.

A MATEMÁTICA

- A curva descrita pela equação (5) é chamada “Markowitz Bullet”

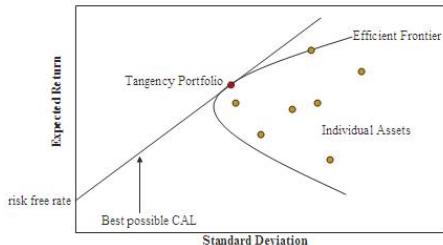


FIGURA : Markowitz Bullet

- Para cada retorno fixado μ_0 , o risco mínimo é dado por σ tal que (σ, μ_0) esteja sobre a curva.
- Ou ainda, para cada risco fixado σ_0 , o retorno máximo é obtido, μ é dado pelo ponto (σ_0, μ) (parte superior da curva).

O PORTFOLIO E INVESTIMENTOS SEM RISCO

- Um investimento livre de risco é tipicamente um investimento com garantias, como uma poupança ou papéis de curto prazo de um país confiável.

O PORTFOLIO E INVESTIMENTOS SEM RISCO

- Um investimento livre de risco é tipicamente um investimento com garantias, como uma poupança ou papéis de curto prazo de um país confiável.
- Sua correlação com os demais investimentos é nula, uma vez que seu risco (ou seja, a variância) é zero.

O PORTFOLIO E INVESTIMENTOS SEM RISCO

- Um investimento livre de risco é tipicamente um investimento com garantias, como uma poupança ou papéis de curto prazo de um país confiável.
- Sua correlação com os demais investimentos é nula, uma vez que seu risco (ou seja, a variância) é zero.
- Por este motivo, como veremos adiante, não só seu retorno (esperança), mas também seu risco (variância) são lineares em função do percentual investido.

O PORTFOLIO E INVESTIMENTOS SEM RISCO

- Um investimento livre de risco é tipicamente um investimento com garantias, como uma poupança ou papéis de curto prazo de um país confiável.
- Sua correlação com os demais investimentos é nula, uma vez que seu risco (ou seja, a variância) é zero.
- Por este motivo, como veremos adiante, não só seu retorno (esperança), mas também seu risco (variância) são lineares em função do percentual investido.
- Por este motivo, no plano risco $\times$ retorno, o gráfico de um investimento livre de riscos é uma reta.

O PORTFOLIO E INVESTIMENTOS SEM RISCO

- Um investimento livre de risco é tipicamente um investimento com garantias, como uma poupança ou papéis de curto prazo de um país confiável.
- Sua correlação com os demais investimentos é nula, uma vez que seu risco (ou seja, a variância) é zero.
- Por este motivo, como veremos adiante, não só seu retorno (esperança), mas também seu risco (variância) são lineares em função do percentual investido.
- Por este motivo, no plano risco $\times$ retorno, o gráfico de um investimento livre de riscos é uma reta.
- Esta reta começa quando temos o total do capital aplicado sem riscos e vai caminhando pelo portfolio até o ponto onde temos todo o capital aplicado no portfolio com risco. Veja a figura 1.

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Queremos combinar o investimento livre de riscos com o portfolio com risco.

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Queremos combinar o investimento livre de riscos com o portfolio com risco.
- Se R_{rf} é o retorno desse investimento e R é o retorno do portfolio de risco temos

$$\tilde{R} = (1 - t)R_{rf} + tR, \quad (6)$$

onde t é o percentual do capital que desejamos investir no portfolio de risco.

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Queremos combinar o investimento livre de riscos com o portfolio com risco.
- Se R_{rf} é o retorno desse investimento e R é o retorno do portfolio de risco temos

$$\tilde{R} = (1 - t)R_{rf} + tR, \quad (6)$$

onde t é o percentual do capital que desejamos investir no portfolio de risco.

- Assim,

$$\mu_{\tilde{R}} = (1 - t)E(R_{rf}) + tE(R) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{R}}^2 &= t^2 \sigma_R^2 + 2t(1 - t)\sigma_R^2 \sigma_{R_{rf}} + (1 - t)^2 \sigma_{R_{rf}}^2 \\ &= t^2 \sigma_R^2 \end{aligned} \quad (8)$$

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Logo, $\sigma_{\tilde{R}} = \sqrt{\sigma_R^2} = t\sigma_R$ e, das equações (7) e (8), temos

$$\mu_{\tilde{R}} = \mu_{rf} + \left(\frac{\mu_R - \mu_{rf}}{\sigma_R} \right) \sigma_{\tilde{R}}, \quad (9)$$

que dá uma relação afim entre $\mu_{\tilde{R}}$ e $\sigma_{\tilde{R}}$.

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Logo, $\sigma_{\tilde{R}} = \sqrt{\sigma_R^2} = t\sigma_R$ e, das equações (7) e (8), temos

$$\mu_{\tilde{R}} = \mu_{rf} + \left(\frac{\mu_R - \mu_{rf}}{\sigma_R} \right) \sigma_{\tilde{R}}, \quad (9)$$

que dá uma relação afim entre $\mu_{\tilde{R}}$ e $\sigma_{\tilde{R}}$.

- A melhor escolha para um portfolio combinando investimentos com e sem riscos está sobre esta reta, pois assim podemos obter, para um mesmo risco fixado, retornos maiores que usando somente o portfolio com risco (estamos acima da fronteira de eficiência nesse caso).

MAIS UM POUCO DE MATEMÁTICA

- Logo, $\sigma_{\tilde{R}} = \sqrt{\sigma_R^2} = t\sigma_R$ e, das equações (7) e (8), temos

$$\mu_{\tilde{R}} = \mu_{rf} + \left(\frac{\mu_R - \mu_{rf}}{\sigma_R} \right) \sigma_{\tilde{R}}, \quad (9)$$

que dá uma relação afim entre $\mu_{\tilde{R}}$ e $\sigma_{\tilde{R}}$.

- A melhor escolha para um portfolio combinando investimentos com e sem riscos está sobre esta reta, pois assim podemos obter, para um mesmo risco fixado, retornos maiores que usando somente o portfolio com risco (estamos acima da fronteira de eficiência nesse caso).
- Se explicitamos as constantes a , b e c em (5) podemos mostrar que essa reta é exatamente a tangente à curva de Markowitz que passa pelo ponto $(0, \mu_{rf})$, onde lembramos que μ_{rf} é a média da variável aleatória R_{rf} . Ver figura 1.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.
- Eles devem ser estimados a partir de dados concretos do mercado.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.
- Eles devem ser estimados a partir de dados concretos do mercado.
- Se temos n opções de investimento, $R_1, \dots, R_n$, uma possibilidade é olhar para o passado recente.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.
- Eles devem ser estimados a partir de dados concretos do mercado.
- Se temos n opções de investimento, $R_1, \dots, R_n$, uma possibilidade é olhar para o passado recente.
- Observando os valores de retorno de cada R_i nos últimos m dias podemos construir vetores $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ com os m valores observados de R_i no vetor A_i .

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.
- Eles devem ser estimados a partir de dados concretos do mercado.
- Se temos n opções de investimento, $R_1, \dots, R_n$, uma possibilidade é olhar para o passado recente.
- Observando os valores de retorno de cada R_i nos últimos m dias podemos construir vetores $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ com os m valores observados de R_i no vetor A_i .
- Com esses vetores formamos uma matriz $m \times n$, $A = [A_1 \cdots A_n]$.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Numa situação prática não conhecemos os verdadeiros valores de retorno e risco de cada investimento.
- Eles devem ser estimados a partir de dados concretos do mercado.
- Se temos n opções de investimento, $R_1, \dots, R_n$, uma possibilidade é olhar para o passado recente.
- Observando os valores de retorno de cada R_i nos últimos m dias podemos construir vetores $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ com os m valores observados de R_i no vetor A_i .
- Com esses vetores formamos uma matriz $m \times n$, $A = [A_1 \cdots A_n]$.
- Em seguida construímos a matriz $C = A^T A$ que contém em cada posição i, j o número $\langle A_i, A_j \rangle$, que representa um tipo de ângulo entre os vetores envolvido e portanto o quanto cada um deles é dependente dos outros.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.
- Isto garante que C tem todos os autovalores positivos.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.
- Isto garante que C tem todos os autovalores positivos.
- E?

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.
- Isto garante que C tem todos os autovalores positivos.
- E?
- Como C é simétrica, ela tem uma base ortonormal de autovalores.

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.
- Isto garante que C tem todos os autovalores positivos.
- E?
- Como C é simétrica, ela tem uma base ortonormal de autovalores.
- E?

COMO CONSTRUIR A MATRIZ DE COVARIÂNCIAS?

- Essa matriz C pode funcionar como matriz de covariâncias para o portfolio considerado.
- Ela é simétrica e positiva definida como toda matriz de covariâncias (e de um produto interno) devem ser.
- Isto garante que C tem todos os autovalores positivos.
- E?
- Como C é simétrica, ela tem uma base ortonormal de autovalores.
- E?
- Os autovetores associados aos maiores autovalores representam as combinações lineares dos investimentos R_i , $1 \leq n \leq n$ de maior risco.