Interpolação Polinomial
Polinômios de Lagrange

Prof. Alexandre Lymberopoulos

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

1. POLINÔMIOS INTERPOLADORES
   - Existência e unicidade do polinômio interpolador
2. POLINÔMIOS DE LAGRANGE
   - Polinômios de Lagrange de grau n
   - Expressão para os $L_i(x)$
3. MATLAB

Nomenclatura

- Um polinômio interpolador para um conjunto $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de $n+1$ pontos no plano é um polinômio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$, para cada $0 \leq i \leq n$.

Nomenclatura

- Um polinômio interpolador para um conjunto $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de $n+1$ pontos no plano é um polinômio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$, para cada $0 \leq i \leq n$.
- Exemplo: Um polinômio de grau 5 interpolando os pontos $\{(-2,-8), (-1,0), (0,-4), (1,-2), (2,24)\}$.

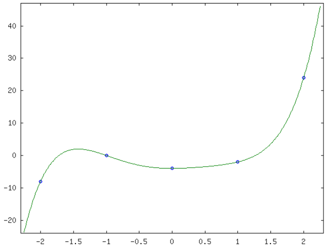

FIGURA : Um polinômio interpolando os pontos dados

O teorema principal

- Um resultado elementar e fundamental para o que se segue é

Teorema

Um polinômio $p(x) \in P_k(\mathbb{R})$ está unicamente determinado se são conhecidos os valores de $p(x)$ em $k+1$ pontos distintos.

O teorema principal

- Um resultado elementar e fundamental para o que se segue é

Teorema

Um polinômio $p(x) \in P_k(\mathbb{R})$ está unicamente determinado se são conhecidos os valores de $p(x)$ em $k + 1$ pontos distintos.

- Demonstração:

O teorema principal

- Um resultado elementar e fundamental para o que se segue é

Teorema

Um polinômio $p(x) \in P_k(\mathbb{R})$ está unicamente determinado se são conhecidos os valores de $p(x)$ em $k+1$ pontos distintos.

- Demonstração:
  1. $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$;

O teorema principal

- Um resultado elementar e fundamental para o que se segue é

Teorema

Um polinômio $p(x) \in P_k(\mathbb{R})$ está unicamente determinado se são conhecidos os valores de $p(x)$ em $k+1$ pontos distintos.

- Demonstração:
  1. $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$;
  2. Dados $x_0, \ldots, x_k$ determinamos $p(x_0), \ldots, p(x_k)$;

O teorema principal

- Um resultado elementar e fundamental para o que se segue é

Teorema

Um polinômio $p(x) \in P_k(\mathbb{R})$ está unicamente determinado se são conhecidos os valores de $p(x)$ em $k+1$ pontos distintos.

- Demonstração:
  1. $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$;
  2. Dados $x_0, \ldots, x_k$ determinamos $p(x_0), \ldots, p(x_k)$;
  3. Isto produz um sistema nas $k+1$ incógnitas $a_0, \ldots, a_k$ com $k+1$ equações, da forma $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} x_0^k & x_0^{k-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^k & x_1^{k-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_k^k & x_k^{k-1} & \ldots & x_k & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_k) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SPD}.$$

Uma nova base

- Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda_a : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $\lambda_a\big(p(x)\big) = p(a)$ é um funcional linear.

Uma nova base

- Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda_a : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $\lambda_a(p(x)) = p(a)$ é um funcional linear.
- Dados pontos $x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$, o conjunto $\{\lambda_{x_i} : 0 \leq i \leq n\}$ é base dual de uma certa base de $P_n(\mathbb{R})$.

Uma nova base

- Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda_a : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $\lambda_a(p(x)) = p(a)$ é um funcional linear.
- Dados pontos $x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$, o conjunto $\{\lambda_{x_i} : 0 \leq i \leq n\}$ é base dual de uma certa base de $P_n(\mathbb{R})$.
- Exemplo: Para $x_0 = 0, x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ essa tal base é formada por polinômios L_0, L_1 e L_2 em $P_2(\mathbb{R})$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Uma nova base

- Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda_a : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $\lambda_a(p(x)) = p(a)$ é um funcional linear.
- Dados pontos $x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$, o conjunto $\{\lambda_{x_i} : 0 \leq i \leq n\}$ é base dual de uma certa base de $P_n(\mathbb{R})$.
- Exemplo: Para $x_0 = 0, x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ essa tal base é formada por polinômios L_0, L_1 e L_2 em $P_2(\mathbb{R})$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

- Tais polinômios existem e são únicos devido ao teorema 1 e são dados por

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, L_1(x) = -x(x-2) \quad \text{e} \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Qual a vantagem?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.

Qual a vantagem?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.
- Como determinar a_0, a_1 e a_2?

Qual a vantagem?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.
- Como determinar a_0, a_1 e a_2?
- Lembrando que $\lambda_{x_i}\big(L_j(x)\big) = \delta_{ij}$ temos

$$a_0 = p(x_0), a_1 = p(x_1) \quad \text{e} \quad a_2 = p(x_2).$$

Qual a vantagem?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.
- Como determinar a_0, a_1 e a_2?
- Lembrando que $\lambda_{x_i}\big(L_j(x)\big) = \delta_{ij}$ temos

$$a_0 = p(x_0), a_1 = p(x_1) \quad \text{e} \quad a_2 = p(x_2).$$

- Exemplo: Determinar o polinômio de grau 2 que interpola os pontos $(0,1), (1,3)$ e $(2,-2)$.

Qual a vantagem?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.
- Como determinar a_0, a_1 e a_2?
- Lembrando que $\lambda_{x_i}\big(L_j(x)\big) = \delta_{ij}$ temos

$$a_0 = p(x_0), a_1 = p(x_1) \quad \text{e} \quad a_2 = p(x_2).$$

- Exemplo: Determinar o polinômio de grau 2 que interpola os pontos $(0, 1), (1, 3)$ e $(2, -2)$.
- Aqui temos $p(0) = 1, p(1) = 3$ e $p(2) = -2$ e portanto

$$p(x) = p(0)L_0(x) + p(1)L_1(x) + p(2)L_2(x) = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 1.$$

QUAL A VANTAGEM?

- Se $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ então $p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x)$.
- Como determinar a_0, a_1 e a_2?
- Lembrando que $\lambda_{x_i}\big(L_j(x)\big) = \delta_{ij}$ temos

$$a_0 = p(x_0), a_1 = p(x_1) \quad \text{e} \quad a_2 = p(x_2).$$

- Exemplo: Determinar o polinômio de grau 2 que interpola os pontos $(0, 1), (1, 3)$ e $(2, -2)$.
- Aqui temos $p(0) = 1, p(1) = 3$ e $p(2) = -2$ e portanto

$$p(x) = p(0)L_0(x) + p(1)L_1(x) + p(2)L_2(x) = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 1.$$

- Aplicação: método de Simpson (integração numérica).

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \ldots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \dots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \dots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Teorema

Os polinômios acima são uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \ldots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Teorema

Os polinômios acima são uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

- Demonstração:

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \ldots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Teorema

Os polinômios acima são uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

- Demonstração:
  1. Como $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ basta ver que $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ é linearmente independente.

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \ldots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Teorema

Os polinômios acima são uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

- Demonstração:
  1. Como $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ basta ver que $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ é linearmente independente.
  2. Considerando $a_0 L_0(x) + \ldots + a_n L_n(x) = \mathbf{0}$ e fazendo $x = x_0, \ldots, x_n$ temos $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Aspectos Teóricos

- Dados $n+1$ números reais, digamos $x_0, \ldots, x_n$ podemos construir $n+1$ polinômios de grau n, $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ tais que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n.$$

Teorema

Os polinômios acima são uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

- Demonstração:
  1. Como $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ basta ver que $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ é linearmente independente.
  2. Considerando $a_0 L_0(x) + \ldots + a_n L_n(x) = \mathbf{0}$ e fazendo $x = x_0, \ldots, x_n$ temos $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.
- Os polinômios acima são chamados *polinômios de Lagrange* de grau n relativos aos pontos $x_0, \ldots, x_n$.

Como são os polinômios de Lagrange?

- Vejamos como é L_0:

Como são os polinômios de Lagrange?

- Vejamos como é L_0:
  $L_0(x)$ tem $x_1, \ldots, x_n$ como raízes e vale 1 em x_0, portanto

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Como são os polinômios de Lagrange?

- Vejamos como é L_0:
  $L_0(x)$ tem $x_1, \ldots, x_n$ como raízes e vale 1 em x_0, portanto

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

- Os outros podem ser obtidos de maneira análoga:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, 1 \leq i \leq n.$$

Como são os polinômios de Lagrange?

- Vejamos como é L_0:
  $L_0(x)$ tem $x_1, \ldots, x_n$ como raízes e vale 1 em x_0, portanto

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

- Os outros podem ser obtidos de maneira análoga:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i \neq j}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, 1 \leq i \leq n.$$

- Se $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ então podemos escrever

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) L_i(x).$$

Polinômios interpoladores

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.

Polinômios interpoladores

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.
- Se A é a matriz de coeficientes e b é a de termos independentes desse sistema, sua solução é a última coluna na saída do comando `rref([A b])`.

Polinômios interpoladores

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.
- Se A é a matriz de coeficientes e b é a de termos independentes desse sistema, sua solução é a última coluna na saída do comando `rref([A b])`.
- Podemos definir o vetor de coeficientes do polinômio interpolador com o comando

```
p=rref([A b])(:,size(A)(2)+1)'.
```

Polinômios interpoladores

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.
- Se A é a matriz de coeficientes e b é a de termos independentes desse sistema, sua solução é a última coluna na saída do comando `rref([A b])`.
- Podemos definir o vetor de coeficientes do polinômio interpolador com o comando

```
p=rref([A b])(:,size(A)(2)+1)'.
```

- Podemos esboçar o gráfico do polinômio interpolador com os comandos:

POLINÔMIOS INTERPOLADORES

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.
- Se A é a matriz de coeficientes e b é a de termos independentes desse sistema, sua solução é a última coluna na saída do comando `rref([A b])`.
- Podemos definir o vetor de coeficientes do polinômio interpolador com o comando

```
p=rref([A b])(:,size(A)(2)+1)'.
```

- Podemos esboçar o gráfico do polinômio interpolador com os comandos:
  1. `xx=[c:0.01:d];`

Polinômios interpoladores

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sabemos construir o sistema linear que determina os coeficientes do polinômio interpolador de grau n desses pontos.
- Se A é a matriz de coeficientes e b é a de termos independentes desse sistema, sua solução é a última coluna na saída do comando `rref([A b])`.
- Podemos definir o vetor de coeficientes do polinômio interpolador com o comando

```
p=rref([A b])(:,size(A)(2)+1)'.
```

- Podemos esboçar o gráfico do polinômio interpolador com os comandos:
  1. `xx=[c:0.01:d];`
  2. `plot(xx,polyval(p,xx))`

Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $x_0, \ldots, x_n$ os polinômios de Lagrange satisfazem $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $x_0, \ldots, x_n$ os polinômios de Lagrange satisfazem $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.
- Procedendo como no caso anterior podemos construir um sistema linear para cada polinômio de Lagrange ou

Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $x_0, \ldots, x_n$ os polinômios de Lagrange satisfazem $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.
- Procedendo como no caso anterior podemos construir um sistema linear para cada polinômio de Lagrange ou
- Construir um “sistema” para todos eles de uma vez com o comando

```
rref([A eye(size(A)(1))]).
```

Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $x_0, \ldots, x_n$ os polinômios de Lagrange satisfazem $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.
- Procedendo como no caso anterior podemos construir um sistema linear para cada polinômio de Lagrange ou
- Construir um "sistema" para todos eles de uma vez com o comando

```
rref([A eye(size(A)(1))]).
```

- Para extrair os polinômios de Lagrange dessa matriz fazemos

```
for j=1:size(A)(2)
L(:,j)=rref([A
eye(size(A)(2))])(:,j+size(A)(2));
endfor
```

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. x=[$x_0 \ldots x_n$] ;

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. `x=[` $x_0 \ldots x_n$ `];`
  2. `y=[` $y_0 \ldots y_n$ `];`

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. `x=[`$x_0 \ldots x_n$`];`
  2. `y=[`$y_0 \ldots y_n$`];`
  3. `p=zeros(1,size(x)(2));`

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. x=[$x_0 \ldots x_n$];
  2. y=[$y_0 \ldots y_n$];
  3. p=zeros(1,size(x)(2));
  4. for i=1:size(x)(2)
     p=p+y(i)*L(:,i)';
     endfor

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. `x=[`$x_0 \ldots x_n$`];`
  2. `y=[`$y_0 \ldots y_n$`];`
  3. `p=zeros(1,size(x)(2));`
  4. ```
     for i=1:size(x)(2)
     p=p+y(i)*L(:,i)';
     endfor
     ```
- Para esboçar o gráfico desse polinômio podemos fazer
     ```

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. `x=[`$x_0 \ldots x_n$`];`
  2. `y=[`$y_0 \ldots y_n$`];`
  3. `p=zeros(1,size(x)(2));`
  4. ```
     for i=1:size(x)(2)
     p=p+y(i)*L(:,i)';
     endfor
     ```
- Para esboçar o gráfico desse polinômio podemos fazer
  1. `xx=[`$x_0 : 0.01 : x_n$`];`
     ```

Interpolando via Polinômios de Lagrange

- Dados os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ obtemos o polinômio interpolador, através dos polinômios de Lagrange, fazendo
  1. `x=[`$x_0 \ldots x_n$`];`
  2. `y=[`$y_0 \ldots y_n$`];`
  3. `p=zeros(1,size(x)(2));`
  4. ```
     for i=1:size(x)(2)
     p=p+y(i)*L(:,i)';
     endfor
     ```
- Para esboçar o gráfico desse polinômio podemos fazer
  1. `xx=[`$x_0 : 0.01 : x_n$`];`
  2. `plot(xx,polyval(p,xx))`
     ```