Modelos Econômicos Lineares
Entrada e Saída de Leontieff

Prof. Alexandre Lymberopoulos

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

O que é modelo econômico?

- Usar equações matemáticas (tipicamente de várias áreas ao mesmo tempo) para entender a economia de uma certa região.

O que é modelo econômico?

- Usar equações matemáticas (tipicamente de várias áreas ao mesmo tempo) para entender a economia de uma certa região.
- A partir das informações fornecidas pelo modelo decisões são tomadas e elas influenciam toda a dinâmica do mercado.

O que é modelo econômico?

- Usar equações matemáticas (tipicamente de várias áreas ao mesmo tempo) para entender a economia de uma certa região.
- A partir das informações fornecidas pelo modelo decisões são tomadas e elas influenciam toda a dinâmica do mercado.
- Vantagens: decisões sistemáticas e embasadas.

O que é modelo econômico?

- Usar equações matemáticas (tipicamente de várias áreas ao mesmo tempo) para entender a economia de uma certa região.
- A partir das informações fornecidas pelo modelo decisões são tomadas e elas influenciam toda a dinâmica do mercado.
- Vantagens: decisões sistemáticas e embasadas.
- Riscos: modelos ineficientes podem levar a decisões inadequadas e gerar situações de difícil controle.

O que é modelo econômico?

- Usar equações matemáticas (tipicamente de várias áreas ao mesmo tempo) para entender a economia de uma certa região.
- A partir das informações fornecidas pelo modelo decisões são tomadas e elas influenciam toda a dinâmica do mercado.
- Vantagens: decisões sistemáticas e embasadas.
- Riscos: modelos ineficientes podem levar a decisões inadequadas e gerar situações de difícil controle.
- Desvantagens: modelos matemáticos são incapazes de prever eventos que dependam de decisões subjetivas como decretos de moratória, por exemplo.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.
- Em [2] ele aplicou este modelo para 170 setores da economia mundial.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.
- Em [2] ele aplicou este modelo para 170 setores da economia mundial.
- O modelo tornou-se uma ferramenta padrão para investigar a estrutura econômica de cidades, estados e países.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.
- Em [2] ele aplicou este modelo para 170 setores da economia mundial.
- O modelo tornou-se uma ferramenta padrão para investigar a estrutura econômica de cidades, estados e países.
- Em 1982 a secretaria de agricultura do estado americano de Dakota do Norte desenvolveu um modelo desse tipo usando 17 setores de sua economia.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.
- Em [2] ele aplicou este modelo para 170 setores da economia mundial.
- O modelo tornou-se uma ferramenta padrão para investigar a estrutura econômica de cidades, estados e países.
- Em 1982 a secretaria de agricultura do estado americano de Dakota do Norte desenvolveu um modelo desse tipo usando 17 setores de sua economia.
- Tal modelo foi adaptado para outros estados, como Minnesota, Montana e Wyoming em 1983.

Um pouco de história...

- Wassily Leontieff desenvolveu seu modelo em torno de 1949.
- Recebeu um prêmio Nobel por este trabalho em 1973.
- Em [2] ele aplicou este modelo para 170 setores da economia mundial.
- O modelo tornou-se uma ferramenta padrão para investigar a estrutura econômica de cidades, estados e países.
- Em 1982 a secretaria de agricultura do estado americano de Dakota do Norte desenvolveu um modelo desse tipo usando 17 setores de sua economia.
- Tal modelo foi adaptado para outros estados, como Minnesota, Montana e Wyoming em 1983.
- No caso de Minnesota a economia foi dividida em 20 setores, o que produziu uma matriz quadrada de ordem 20, vide [1].

Um exemplo simples

- Uma sociedade é constituída de três indivíduos: um fazendeiro que produz toda a comida, um carpinteiro que constrói todas as casas e um alfaiate que confecciona todas as roupas.

Um exemplo simples

- Uma sociedade é constituída de três indivíduos: um fazendeiro que produz toda a comida, um carpinteiro que constrói todas as casas e um alfaiate que confecciona todas as roupas.
- Suponhamos que as unidades de produção são tais que cada indivíduo produz uma unidade de seu produto por ano e que a porção de cada produto consumida pelos indivíduos é dada na tabela abaixo

Um exemplo simples

- Uma sociedade é constituída de três indivíduos: um fazendeiro que produz toda a comida, um carpinteiro que constrói todas as casas e um alfaiate que confecciona todas as roupas.
- Suponhamos que as unidades de produção são tais que cada indivíduo produz uma unidade de seu produto por ano e que a porção de cada produto consumida pelos indivíduos é dada na tabela abaixo
-

	Bens produzidos por		
Bens consumidos por	Fazendeiro	Carpinteiro	Alfaiate
Fazendeiro	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Carpinteiro	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Alfaiate	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Um exemplo simples

- Uma sociedade é constituída de três indivíduos: um fazendeiro que produz toda a comida, um carpinteiro que constrói todas as casas e um alfaiate que confecciona todas as roupas.
- Suponhamos que as unidades de produção são tais que cada indivíduo produz uma unidade de seu produto por ano e que a porção de cada produto consumida pelos indivíduos é dada na tabela abaixo
-

	Bens produzidos por		
Bens consumidos por	Fazendeiro	Carpinteiro	Alfaiate
Fazendeiro	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Carpinteiro	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Alfaiate	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

- Quais devem ser os preços p_1, p_2 e p_3 da unidade de comida, de casa e de roupa para que haja equilíbrio (ninguém ganha nem perde dinheiro)?

Às contas!

- Os gastos do fazendeiro são $\frac{7}{16}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{16}p_3$ enquanto sua receita é p_1 (pois ele produz somente uma unidade de comida por ano).

Às contas!

- Os gastos do fazendeiro são $\frac{7}{16}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{16}p_3$ enquanto sua receita é p_1 (pois ele produz somente uma unidade de comida por ano).
- Deste modo uma equação para o sistema é

$$\frac{7}{16}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{16}p_3 = p_1. \qquad (1)$$

Às contas!

- Os gastos do fazendeiro são $\frac{7}{16}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{16}p_3$ enquanto sua receita é p_1 (pois ele produz somente uma unidade de comida por ano).
- Deste modo uma equação para o sistema é

$$\frac{7}{16}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{16}p_3 = p_1. \tag{1}$$

- Analogamente para o carpinteiro e para o alfaiate temos

$$\frac{5}{16}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{5}{16}p_3 = p_2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = p_3 \tag{3}$$

Um pouco mais...

- As equações (1), (2) e (3) juntas formam um sistema linear que pode ser escrito matricialmente por

$$Ap = p, \tag{4}$$

onde

Um pouco mais...

- As equações (1), (2) e (3) juntas formam um sistema linear que pode ser escrito matricialmente por

$$Ap = p, \tag{4}$$

onde

- $$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{6} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Um pouco mais...

- As equações (1), (2) e (3) juntas formam um sistema linear que pode ser escrito matricialmente por

$$Ap = p, \tag{4}$$

onde

- $$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{6} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

- O sistema (4) garante simplesmente que estamos procurando um autovetor de coordenadas não negativas para o autovalor 1 da matriz A.

Um pouco mais...

- As equações (1), (2) e (3) juntas formam um sistema linear que pode ser escrito matricialmente por

$$Ap = p, \tag{4}$$

onde

- $$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{6} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

- O sistema (4) garante simplesmente que estamos procurando um autovetor de coordenadas não negativas para o autovalor 1 da matriz A.
- Tal autovetor sempre existe devido ao teorema de Perron (provado em 1907).

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.
- Para fabricar o produto P_i, o fabricante precisa de certa quantidade de cada um dos produtos P_j fabricados por F_j.

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.
- Para fabricar o produto P_i, o fabricante precisa de certa quantidade de cada um dos produtos P_j fabricados por F_j.
- Se a_{ij} é essa quantidade então $0 \leq a_{ij} \leq 1$.

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.
- Para fabricar o produto P_i, o fabricante precisa de certa quantidade de cada um dos produtos P_j fabricados por F_j.
- Se a_{ij} é essa quantidade então $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
- Suponhamos um modelo *fechado*, ou seja, não entra nem sai nenhum produto do nosso sistema.

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.
- Para fabricar o produto P_i, o fabricante precisa de certa quantidade de cada um dos produtos P_j fabricados por F_j.
- Se a_{ij} é essa quantidade então $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
- Suponhamos um modelo *fechado*, ou seja, não entra nem sai nenhum produto do nosso sistema.
- Ou seja, o consumo total de cada produto é igual à sua produção total

$$a_{1j} + \ldots + a_{nj} = 1.$$

Situação Geral - Modelo de Troca

- Existem n fabricantes, $F_1, \ldots, F_n$ produzindo cada um deles um dos n produtos $P_1, \ldots, P_n$ a uma taxa de uma unidade por período de tempo.
- Para fabricar o produto P_i, o fabricante precisa de certa quantidade de cada um dos produtos P_j fabricados por F_j.
- Se a_{ij} é essa quantidade então $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
- Suponhamos um modelo *fechado*, ou seja, não entra nem sai nenhum produto do nosso sistema.
- Ou seja, o consumo total de cada produto é igual à sua produção total

$$a_{1j} + \ldots + a_{nj} = 1.$$

- Se o produto P_j custa p_j então, como o lucro de F_i é igual à sua despesa temos

$$a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n = p_i, 1 \leq i \leq n.$$

Situação geral - Modelo de Troca

- A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada matriz de troca e nosso modelo é dado pela equação
$$Ap = p,$$

Situação geral - Modelo de Troca

- A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada matriz de troca e nosso modelo é dado pela equação
$$Ap = p,$$
- onde procuramos um vetor p não nulo de coordenadas não negativas.

Situação geral - Modelo de Troca

- A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada matriz de troca e nosso modelo é dado pela equação
$$Ap = p,$$
- onde procuramos um vetor p não nulo de coordenadas não negativas.
- Exemplo de modelo fechado:

Situação geral - Modelo de Troca

- A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada matriz de troca e nosso modelo é dado pela equação
$$Ap = p,$$
- onde procuramos um vetor p não nulo de coordenadas não negativas.
- Exemplo de modelo fechado:
- O mundo!

Situação geral - Modelo de Troca

- A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada matriz de troca e nosso modelo é dado pela equação
$$Ap = p,$$
- onde procuramos um vetor p não nulo de coordenadas não negativas.
- Exemplo de modelo fechado:
- O mundo!
- Precisamos supor que a renda de cada país provém exclusivamente da venda dos bens que ele produz (tanto internamente quando externamente) e que cada país compra uma quantidade fixa dos bens dos outros países (pelo menos no período em que vamos aplicar o modelo).

Descrição do modelo aberto

- Suponhamos que nosso sistema produz n bens $B_1, \ldots, B_n$ produzidos por n ramos de atividade $A_1, \ldots, A_n$ “com exclusividade”.

Descrição do modelo aberto

- Suponhamos que nosso sistema produz n bens $B_1, \ldots, B_n$ produzidos por n ramos de atividade $A_1, \ldots, A_n$ "com exclusividade".
- A equação básica para o modelo aberto é

$$P_T = P_I + D, \tag{5}$$

onde P_T é a produção total, P_I é produção interna e D é a demanda externa.

Descrição do modelo aberto

- Suponhamos que nosso sistema produz n bens $B_1, \ldots, B_n$ produzidos por n ramos de atividade $A_1, \ldots, A_n$ "com exclusividade".
- A equação básica para o modelo aberto é

$$P_T = P_I + D, \tag{5}$$

onde P_T é a produção total, P_I é produção interna e D é a demanda externa.

- Observe que o modelo fechado é um caso particular deste, quando $D = 0$ e as colunas da matriz que modelará o problema têm soma 1 (são matrizes de troca).

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.
- Cada linha do produto Cx é da forma $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$, e representa a quantidade consumida total do bem B_i.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.
- Cada linha do produto Cx é da forma $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$, e representa a quantidade consumida total do bem B_i.
- A expressão $x_i - (c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n)$ é a *produção líquida*.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.
- Cada linha do produto Cx é da forma $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$, e representa a quantidade consumida total do bem B_i.
- A expressão $x_i - (c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n)$ é a *produção líquida*.
- Esta expressão é a i-ésima linha de $x - Cx = (I_n - C)x$.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.
- Cada linha do produto Cx é da forma $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$, e representa a quantidade consumida total do bem B_i.
- A expressão $x_i - (c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n)$ é a *produção líquida*.
- Esta expressão é a i-ésima linha de $x - Cx = (I_n - C)x$.
- Denotaremos por d_i é a demanda externa do bem B_i.

Descrição do modelo aberto

- Denotemos por c_{ij} o valor gasto com B_j para produzir um dólar do bem B_i.
- A matriz $C = (c_{ij})$ é chamada *matriz de consumo*.
- Denotemos por $x_i \geq 0$ o valor em dólares do bem B_i produzido num dado intervalo de tempo fixo.
- O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de produção*.
- Cada linha do produto Cx é da forma $c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$, e representa a quantidade consumida total do bem B_i.
- A expressão $x_i - (c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n)$ é a *produção líquida*.
- Esta expressão é a i-ésima linha de $x - Cx = (I_n - C)x$.
- Denotaremos por d_i é a demanda externa do bem B_i.
- O vetor $d = \begin{bmatrix} d_1 & \ldots & d_n \end{bmatrix}^t$ é chamado *vetor de demanda*.

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?
- Ou seja, queremos um vetor x tal que $(I_n - C)x = d$.

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?
- Ou seja, queremos um vetor x tal que $(I_n - C)x = d$.
- Para que isto seja possível a matriz $I_n - C$ deve ser invertível, ou seja, o número 0 não é um autovalor dela.

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?
- Ou seja, queremos um vetor x tal que $(I_n - C)x = d$.
- Para que isto seja possível a matriz $I_n - C$ deve ser invertível, ou seja, o número 0 não é um autovalor dela.
- Só isso?

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?
- Ou seja, queremos um vetor x tal que $(I_n - C)x = d$.
- Para que isto seja possível a matriz $I_n - C$ deve ser invertível, ou seja, o número 0 não é um autovalor dela.
- Só isso?
- Não! As entradas de $(I_n - C)^{-1}$ devem ser não negativas para garantir que $x = (I_n - C)^{-1}d$ tenha todas as coordenadas não negativas.

O Problema

- Dado um vetor de demandas d, podemos encontrar um vetor de produção x tal que a demanda externa seja satisfeita sem excedentes?
- Ou seja, queremos um vetor x tal que $(I_n - C)x = d$.
- Para que isto seja possível a matriz $I_n - C$ deve ser invertível, ou seja, o número 0 não é um autovalor dela.
- Só isso?
- Não! As entradas de $(I_n - C)^{-1}$ devem ser não negativas para garantir que $x = (I_n - C)^{-1}d$ tenha todas as coordenadas não negativas.
- Se C é tal que $(I_n - C)^{-1}$ existe e tem entradas não negativas dizemos que C é *produtiva* ou que o sistema que ela representa é *produtivo*.

Exemplos

- Decida se as matrizes de consumo abaixo são de sistemas produtivos:

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

- Decida se as matrizes de consumo abaixo são de sistemas produtivos:

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- Qual o único vetor de demandas d para o qual $x = (I_2 - C)^{-1} d$ é não negativo? O que isso significa?

Exemplos

- Decida se as matrizes de consumo abaixo são de sistemas produtivos:

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- Qual o único vetor de demandas d para o qual $x = (I_2 - C)^{-1} d$ é não negativo? O que isso significa?
- Considere um sistema que atua em 5 ramos: automobilístico, aço, eletrônicos, carvão e química com a matriz de consumos dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 \\ 0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

  Determine o vetor de produção desse sistema para as demandas $d = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}^t$.

Randal C. Coon, Carlena F. Vocke, and F. Larry Leistritz.
Expansion and adaptation of the north dakota economic-demographic assessment model (nedam) for minnesota: Technical description.
Agricultural Economics Miscellaneous Reports 120749, North Dakota State University, Department of Agribusiness and Applied Economics, 1984.

Wassily Leontieff.
The world economy of the year 2000.
Scientific American, Sept.:166, 1980.