Q1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 2 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que

$$T\big(T(v)\big) = 0,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(III) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e se $v \in V$ é tal que $\langle v, e_i \rangle = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então $v = 0$;

(II) se S é um subespaço de V e se $e_1, e_2, \ldots, e_m \in S$ são vetores dois a dois distintos tais que $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ é uma base de S, então

$$\mathrm{proj}_S\, v = \mathrm{proj}_{e_1} v + \mathrm{proj}_{e_2} v + \cdots + \mathrm{proj}_{e_m} v,$$

para qualquer $v \in V$;

(III) se $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{\lambda v}\, w = \lambda\, \mathrm{proj}_v\, w.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q3. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v, w \in V$, vale que $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(II) para quaisquer $v, w \in V$, vale que $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, $v = 0$ ou existe $\lambda \geq 0$ tal que $w = \lambda v$;

(III) para quaisquer $v, w \in V$ e qualquer subespaço S de V, vale que se $\langle v, w \rangle = 0$ e $w \in S^{\perp}$, então $v \in S$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q4. Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad p, q \in P(\mathbb{R}).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $q(t) = a + bt$ é o elemento de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $p(t) = t^4$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{2}{5}$;
(b) $\frac{1}{5}$;
(c) $\frac{4}{5}$;
(d) 1;
(e) $\frac{3}{5}$.

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(2, 1, -1, 2), (-1, 2, -2, -1)].$$

Se $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$ são tais que

$$(6, -4, 2, 2) = v + w$$

e se $w = (a, b, c, d)$, então $a + b + c + d$ é igual a:

(a) -4;
(b) 2;
(c) -2;
(d) 8;
(e) -6.

Q6. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V. Se $v \in V$, $w \in S^{\perp}$ e $z \in S$ são vetores não nulos tais que $v = 4w + 7z$, então o vetor de S mais próximo de v é:

(a) $-7z$;
(b) $v - \operatorname{proj}_z v$;
(c) z;
(d) $\operatorname{proj}_w v$;
(e) $7z$.

Q7. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - b + c - d, a - b, c - d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$;
(b) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 3$;
(c) $\operatorname{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$;
(d) T é sobrejetora;
(e) $\operatorname{Ker}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Q8. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se

$$S = [2 + t - t^2, -3 + t^2]$$

e $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $1 + at + bt^2 \in S^{\perp}$, então $a + b$ é igual a:

(a) $-\frac{1}{2}$;
(b) $-\frac{3}{2}$;
(c) -2;
(d) $\frac{1}{2}$;
(e) -4.

Q9. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c+d & a-b \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$;
(b) T é injetora;
(c) T é sobrejetora;
(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

Q10. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $v, w \in V$ tais que $v - w \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Pode-se afirmar que:

(a) $v \in S^{\perp}$;
(b) $\langle v, w\rangle = \|w\|^2$;
(c) $\langle v, w\rangle = \|v\|$;
(d) $\langle v, w\rangle = 0$;
(e) $v = 0$.

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$. Suponha que $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ seja a base ortogonal obtida a partir de $\mathcal{B}$ pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Se $v_4 = (-1, 3, 1, 1)$ e $w_4 = (-2, 1, 0, 1)$, então $\operatorname{proj}_{[w_1, w_2, w_3]} v_4$ é igual a:

(a) $(-1, 2, -1, -4)$;
(b) $(1, 2, 1, 0)$;
(c) $(0, 1, 1, -1)$;
(d) $(2, 1, 1, 3)$;
(e) $(1, 1, 2, 1)$.

Q12. Sejam $n \geq 1$ um inteiro, V um espaço vetorial de dimensão n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ não nulos e dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

(I) se o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal, então $\mathcal{B}$ é uma base de V;
(II) se $\mathcal{B}$ é uma base de V, então o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal;
(III) o conjunto $\mathcal{B}$ é ortogonal se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

tem determinante positivo.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q13. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v, w \in V$, vale que:
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big);$$

(II) para quaisquer $v, w \in V$, vale que v é ortogonal a w se, e somente se, $\|v+w\| = \|v-w\|$;

(III) se S_1 e S_2 são subespaços de V tais que $S_1 \subset S_2$, então $S_1^\perp \subset S_2^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q14. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:
$$T(x,y,z) = (-x-2y-3z, x+2y+3z, 3x+6y+9z), \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$$
Considere as seguintes afirmações:

(I) existe um vetor $v \neq 0$ em $\mathrm{Ker}(T) \cap W$;

(II) existe um vetor $v \neq 0$ em $\mathrm{Im}(T) \cap W$;

(III) $T\big(T(v)\big) = T(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q15. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$;

(II) se $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora;

(III) se T é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q16. Considere a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle p, q \rangle = p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1) + p'(2)q'(2) + p'(3)q'(3), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existe $p \in P_3(\mathbb{R})$ não nulo tal que $\langle p, p \rangle = 0$;

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q, r \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p + q, r \rangle \neq \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$;

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\langle \lambda p, q \rangle \neq \lambda \langle p, q \rangle$;

(d) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(e) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$, pois existem $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ tais que $\langle p, q \rangle \neq \langle q, p \rangle$.