

**Q1.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  uma base de  $\mathbb{R}^4$ . Suponha que  $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  seja a base ortogonal obtida a partir de  $\mathcal{B}$  pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Se  $v_4 = (-1, 3, 1, 1)$  e  $w_4 = (-2, 1, 0, 1)$ , então  $\text{proj}_{[w_1, w_2, w_3]} v_4$  é igual a:

- (a)  $(1, 1, 2, 1)$ ;
- (b)  $(-1, 2, -1, -4)$ ;
- (c)  $(0, 1, 1, -1)$ ;
- (d)  $(1, 2, 1, 0)$ ;
- (e)  $(2, 1, 1, 3)$ .

**Q2.** Considere o espaço vetorial  $P_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se

$$S = [2 + t - t^2, -3 + t^2]$$

e  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $1 + at + bt^2 \in S^\perp$ , então  $a + b$  é igual a:

- (a)  $-4$ ;
- (b)  $-\frac{1}{2}$ ;
- (c)  $-\frac{3}{2}$ ;
- (d)  $\frac{1}{2}$ ;
- (e)  $-2$ .

**Q3.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer  $v, w \in V$ , vale que:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2);$$

(II) para quaisquer  $v, w \in V$ , vale que  $v$  é ortogonal a  $w$  se, e somente se,  $\|v + w\| = \|v - w\|$ ;

(III) se  $S_1$  e  $S_2$  são subespaços de  $V$  tais que  $S_1 \subset S_2$ , então  $S_1^\perp \subset S_2^\perp$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q4.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V$  e se  $v \in V$  é tal que  $\langle v, e_i \rangle = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , então  $v = 0$ ;
- (II) se  $S$  é um subespaço de  $V$  e se  $e_1, e_2, \dots, e_m \in S$  são vetores dois a dois distintos tais que  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  é uma base de  $S$ , então

$$\text{proj}_S v = \text{proj}_{e_1} v + \text{proj}_{e_2} v + \dots + \text{proj}_{e_m} v,$$

para qualquer  $v \in V$ ;

- (III) se  $v, w \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \neq 0$  e  $\lambda \neq 0$ , então:

$$\text{proj}_{\lambda v} w = \lambda \text{proj}_v w.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q5.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c + d & a - b \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (c)  $T$  é injetora;
- (d)  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ;
- (e)  $T$  é sobrejetora.

**Q6.** Considere o espaço vetorial  $P(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in P(\mathbb{R}).$$

Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $q(t) = a + bt$  é o elemento de  $P_1(\mathbb{R})$  mais próximo de  $p(t) = t^4$ , então  $a + b$  é igual a:

- (a)  $\frac{1}{5}$ ;
- (b) 1;
- (c)  $\frac{2}{5}$ ;
- (d)  $\frac{3}{5}$ ;
- (e)  $\frac{4}{5}$ .

**Q7.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer  $v, w \in V$ , vale que  $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$  se, e somente se,  $v$  e  $w$  são linearmente dependentes;
- (II) para quaisquer  $v, w \in V$ , vale que  $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$  se, e somente se,  $v = 0$  ou existe  $\lambda \geq 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;
- (III) para quaisquer  $v, w \in V$  e qualquer subespaço  $S$  de  $V$ , vale que se  $\langle v, w \rangle = 0$  e  $w \in S^\perp$ , então  $v \in S$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

**Q8.** Considere a função  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definida por:

$$\langle p, q \rangle = p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1) + p'(2)q'(2) + p'(3)q'(3), \quad p, q \in P_3(\mathbb{R}).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é um produto interno em  $P_3(\mathbb{R})$ , pois existem  $p, q \in P_3(\mathbb{R})$  tais que  $\langle p, q \rangle \neq \langle q, p \rangle$ ;
- (b)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é um produto interno em  $P_3(\mathbb{R})$ , pois existem  $p, q \in P_3(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle \lambda p, q \rangle \neq \lambda \langle p, q \rangle$ ;
- (c)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $P_3(\mathbb{R})$ ;
- (d)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é um produto interno em  $P_3(\mathbb{R})$ , pois existe  $p \in P_3(\mathbb{R})$  não nulo tal que  $\langle p, p \rangle = 0$ ;
- (e)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é um produto interno em  $P_3(\mathbb{R})$ , pois existem  $p, q, r \in P_3(\mathbb{R})$  tais que  $\langle p + q, r \rangle \neq \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$ .

**Q9.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T$  é injetora, então  $\dim(V) \leq \dim(W)$ ;
- (II) se  $\dim(V) \leq \dim(W)$ , então  $T$  é injetora;
- (III) se  $T$  é sobrejetora, então  $\dim(V) \geq \dim(W)$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q10.** Sejam  $n \geq 1$  um inteiro,  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  com  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  não nulos e dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se o conjunto  $\mathcal{B}$  é ortogonal, então  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ ;
- (II) se  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ , então o conjunto  $\mathcal{B}$  é ortogonal;
- (III) o conjunto  $\mathcal{B}$  é ortogonal se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

tem determinante positivo.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q11.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = [(2, 1, -1, 2), (-1, 2, -2, -1)].$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  são tais que

$$(6, -4, 2, 2) = v + w$$

e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  é igual a:

- (a)  $-6$ ;
- (b)  $8$ ;
- (c)  $-2$ ;
- (d)  $-4$ ;
- (e)  $2$ .

**Q12.** Sejam  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $S$  um subespaço de  $V$  e  $v, w \in V$  tais que  $v - w \in S$  e  $w \in S^\perp$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $v = 0$ ;
- (b)  $\langle v, w \rangle = 0$ ;
- (c)  $\langle v, w \rangle = \|v\|$ ;
- (d)  $\langle v, w \rangle = \|w\|^2$ ;
- (e)  $v \in S^\perp$ .

**Q13.** Seja  $W$  um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2 e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (-x - 2y - 3z, x + 2y + 3z, 3x + 6y + 9z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) existe um vetor  $v \neq 0$  em  $\text{Ker}(T) \cap W$ ;
- (II) existe um vetor  $v \neq 0$  em  $\text{Im}(T) \cap W$ ;
- (III)  $T(T(v)) = T(v)$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

**Q14.** Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - b + c - d, a - b, c - d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\text{Ker}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ ;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (d)  $T$  é sobrejetora;
- (e)  $\text{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$ .

**Q15.** Sejam  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $S$  um subespaço de  $V$ . Se  $v \in V$ ,  $w \in S^\perp$  e  $z \in S$  são vetores não nulos tais que  $v = 4w + 7z$ , então o vetor de  $S$  mais próximo de  $v$  é:

- (a)  $-7z$ ;
- (b)  $7z$ ;
- (c)  $v - \text{proj}_z v$ ;
- (d)  $\text{proj}_w v$ ;
- (e)  $z$ .

**Q16.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 2 e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear não nula tal que

$$T(T(v)) = 0,$$

para todo  $v \in V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (II)  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (III)  $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.