Q1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear e denote por $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Suponha que

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(2,4,0)], \quad \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(0,1,-1)] \quad \text{e} \quad (1,0,1) \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{I}),$$

onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correta:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Q2. Seja $T : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t^3(t-1)^2(t+1)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) \in \{3,4,5\}$;

(II) T é diagonalizável se, e somente se, existem cinco vetores distintos e linearmente independentes $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$ e $v_3, v_4, v_5 \in \mathrm{Ker}(T)$;

(III) se $A \in M_6(\mathbb{R})$ é uma matriz cujo polinômio característico é igual ao polinômio característico de T, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q3. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t+t^2, t^2, t^2+t^3\}$$

dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente. Se $T : \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{R})$ é a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então $T(0,1)$ é igual a:

(a) $t + 2t^2 + 3t^3$;
(b) $3 + t - 3t^2 - 3t^3$;
(c) $3 + t - t^2 - 3t^3$;
(d) $-3 - t + t^2 + 3t^3$;
(e) $-3 - t + 3t^2 + 3t^3$.

Q4. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes condições:

(I) T é inversível;
(II) T tem n autovalores não nulos distintos;
(III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) (I) implica (II) e (III) implica (II);
(b) (I) implica (II) e (III) implica (I);
(c) (II) implica (I) e (II) implica (III);
(d) (II) implica (I) e (III) implica (I);
(e) (II) implica (III) e (III) implica (I).

Q5. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(3,2),(2,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Se λ e μ denotam os dois autovalores de T, então $\lambda + \mu$ é igual a:

(a) 8;
(b) -4;
(c) 0;
(d) -8;
(e) 4.

Q6. Sejam $n \geq 4$ um inteiro, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^n$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se alguma coluna de A é uma combinação linear das outras colunas de A, então T não é sobrejetor;
(II) se alguma linha de A é uma combinação linear das outras linhas de A, então 0 é um autovalor de T;
(III) se $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão 2, então não existe um autovalor λ de T tal que $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ tenha dimensão $n-1$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q7. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$T(1,1,0) = (1,a,b), \quad T(1,-1,0) = (2,4,c) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (3,5,6)$$

for simétrico, então $a + b + c$ é igual a:

(a) 8;
(b) $2 + 8\sqrt{2}$;
(c) 10;
(d) 1;
(e) $10\sqrt{2}$.

Q8. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que a inversa da matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

é

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{79} é igual a:

(a) $\frac{1}{6}(5 - 2^{-79})$;
(b) $\frac{1}{6}(5 + 5 \cdot 2^{-79})$;
(c) $\frac{1}{6}(1 - 2 \cdot 2^{-79})$;
(d) $\frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 2^{-79})$;
(e) $\frac{1}{6}(1 - 2^{-79})$.

Q9. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t^3(t-2)^2$. Denote por I o operador identidade de V. Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 5$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T - 2\mathrm{I})\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) = 0$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})\big) = 2$.

Q10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,-1),(0,2)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [U]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

então:

(a) T e U são ambos simétricos e têm polinômios característicos diferentes;
(b) T e U são ambos simétricos e têm o mesmo polinômio característico;
(c) T é simétrico e U não é simétrico;
(d) nem T nem U são simétricos;
(e) T não é simétrico e U é simétrico.

Q11. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 24 e $T : V \to V$ um operador linear. Denote por I o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se 1 é um autovalor de T, então a dimensão de $\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})$ é menor ou igual a 23;

(II) T tem pelo menos um autovalor;

(III) T tem no máximo 24 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q12. Seja $T : M_4(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ um operador linear e considere as seguintes afirmações:

(I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos autoespaços de T é igual a 16;

(II) se A é a matriz que representa T com respeito a alguma base de $M_4(\mathbb{R})$, então $\det(2A) = 16 \det(A)$;

(III) se T é diagonalizável e 4, -4, 16 e -16 pertencem ao conjunto dos autovalores de T, então a matriz que representa T com respeito a qualquer base de $M_4(\mathbb{R})$ é inversível.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q13. Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^4$ e seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = [(1,2,0,0),(0,-1,0,1)], \quad \mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [(0,0,0,1)] \quad \text{e}$$
$$\mathrm{Ker}(T-3\mathrm{I}) = [(1,0,1,1)].$$

Temos que $T(2,1,2,0)$ é igual a:

(a) $(0,-1,-1,2)$;
(b) $(-3,0,-3,-3)$;
(c) $(6,0,6,4)$;
(d) $(2,0,2,1)$;
(e) $(1,3,0,-1)$.

Q14. Sejam $A_1, A_2 \in M_5(\mathbb{R})$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovalor de A_1 também é um autovalor de A_2;

(II) se $T_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ e $T_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ são operadores lineares, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$, $[T_1]_{\mathcal{B}} = A_1$, $[T_2]_{\mathcal{B}} = A_2$ e se as matrizes A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovetor de T_1 também é um autovetor de T_2;

(III) se A_1 e A_2 possuem exatamente os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades algébricas, então A_1 e A_2 são semelhantes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se o operador T é simétrico, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, para qualquer base $\mathcal{B}$ de V;

(II) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T, então o operador T é simétrico;

(III) se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle$, para todos $v, w \in V$, então o operador T é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q16. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(a + bt + ct^2) = a + (2a - b)t + (b + c)t^2,$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ a base de $P_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$ é igual a:

(a) $-2t + 5t^2$;
(b) $1 + t + 2t^2$;
(c) $1 + 3t - t^2$;
(d) $\frac{1}{6}(9 + 4t + 3t^2)$;
(e) $2t + 3t^2$.